



UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Departamento de Engenharia Civil

Determinação de Comprimentos de Encurvadura de Pilares-Estaca

Por

Francisco Pedro Peres da Silva Morais Fialho

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil

Orientador: João Carlos Gomes Rocha de Almeida

Co-orientador: José António Cruz Delgado

Júri

Presidente: Prof. Doutor Armando Nunes Antão

Arguente: Prof. Doutor José Varandas Ferreira

Vogal: Prof. Doutor João Rocha de Almeida

Julho de 2015



**FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA**

“Copyright” Francisco Pedro Peres da Silva Morais Fialho, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à minha família, aos meus Pais e ao meu Tio. Obrigado pela tolerância, paciência e apoio intermináveis que me prestaram. Seria impossível cumprir esta etapa sem ter-vos do meu lado e sem os valores e educação que me transmitiram e continuam a transmitir. É sem dúvida a melhor formação que posso algum dia receber. À Fatinha pelo ânimo e gargalhadas que ao longo do meu percurso escolar foram retirando peso dos ombros e tornando os dias um pouco mais leves, muito obrigado.

À minha namorada, por me aturares nas horas de maior aperto, por acreditares em mim e no meu valor e te manteres a meu lado, pela presença constante que tornaram todos os momentos especiais, pelo amor. Obrigado por tudo.

Ao João, és o meu verdadeiro irmão e à Teresa, a minha irmã e à sua família.

A todos os meus colegas e amigos que pautaram o percurso académico com horas de trabalho, amizade e diversão inesquecíveis (vocês sabem quem são).

Ao meu Orientador, Professor João Rocha Almeida, pelo apoio, sabedoria e conhecimentos partilhados que possibilitaram a elaboração desta tese. Ao meu co-orientador Eng^o José António Delgado pela grande experiência e disponibilidade prestada ao longo da execução do trabalho.

A todos os que foram meus Professores nesta faculdade e que me um tornaram melhor indivíduo, pelo imenso conhecimento partilhado e pelas dificuldades colocadas, indispensáveis a uma formação de qualidade.

À FCT pela maravilhosa experiência universitária e que em última análise culminou nesta dissertação, bem como pelas portas que abre e novas oportunidades que me proporciona.

A uma nova etapa.

Resumo

O trabalho desenvolvido na presente dissertação tem como principal objetivo a determinação da carga crítica e do respetivo comprimento de encurvadura de pilares-estaca, contemplando diversos casos de estudo.

São efetuadas duas abordagens ao problema de forma a poder realizar estudos comparativos das metodologias adotadas. O primeiro tipo de análise é baseado no método de Elementos Finitos; o segundo tipo de análise é efetuado com base no programa de cálculo automático SAP2000, utilizando elementos de barra. Para resolução do problema em questão, comum em pilares de pontes ou viadutos em betão armado, considera-se comportamento elástico do material do pilar e do solo onde este se encontra implantado, admitindo um modelo de fundação de Winkler.

Primeiramente, são apresentados os fundamentos teóricos que suportam o tema da dissertação de forma a dar ao leitor um enquadramento de vários aspetos inerentes a fenómenos de instabilidade estrutural. Em seguida, descreve-se a metodologia adotada para análise do problema. Finalmente são apresentados casos de estudo retirados de um projeto realizado num viaduto. Nesses casos, são analisados pilares com geometrias diferenciadas, quer na direção longitudinal quer na direção transversal.

Palavras chave:

Carga Crítica, Comprimento de Encurvadura, Fundação de Winkler.

Abstract

Determination of Buckling Lengths of Beam-Piles

The work presented in this dissertation is focused on the determination of the critical load and respective effective buckling length of beam-piles, considering various possible scenarios.

The problem is analyzed in two different ways, to provide a base of comparison for the methodologies tested. The first approach is based on the Finite Element method; the second is carried out using the automatic calculation software SAP2000 using frame elements. Both formulations assume linear elastic behavior of the material and of the surrounding soil. The column is modeled as resting on a Winkler foundation.

Since the problem under study is found in columns of bridges and viaducts in reinforced concrete, the geometric and geotechnical data of the case studies analyzed are taken from a project of a viaduct. In each case study, various columns with different geometries are considered, both in the longitudinal direction and in the transverse direction. The corresponding results are presented and discussed, enabling meaningful conclusions to be drawn.

Keywords:

Buckling Load, Buckling Length, Winkler Foundation.

Índice de Matérias

| | |
|---|-----------|
| Índice de Matérias | ix |
| Índice de Figuras | xi |
| Índice de Tabelas | xv |
| Lista de Abreviaturas, Siglas e Símbolos | xvii |
| 1 Introdução | 1 |
| 1.1 Motivações e Objetivos | 1 |
| 1.2 Organização do Trabalho | 2 |
| 2 Estabilidade Estrutural de Colunas: Conceitos Fundamentais | 3 |
| 2.1 Introdução | 3 |
| 2.2 Instabilidade Estrutural Bifurcacional | 4 |
| 2.3 Soluções Clássicas de Encurvadura | 7 |
| 2.4 Tipos de Análise | 9 |
| 2.4.1 Análise Linear de Estabilidade | 11 |
| 2.4.2 Métodos de Cálculo Aproximados | 12 |
| 3 Metodologia Aplicada | 13 |
| 3.1 Introdução | 13 |
| 3.2 Fundação | 13 |
| 3.3 Exploração e Análise do Solo | 14 |
| 3.4 Módulo de Reação do Solo | 16 |

Índice de Matérias

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.5 | Formulação do Método dos Elementos Finitos | 20 |
| 3.5.1 | Determinação da Matriz A | 22 |
| 3.5.2 | Determinação da Matriz B | 28 |
| 3.5.3 | Matriz de Rigidez S | 29 |
| 3.5.4 | Rigidez das Molas de Winkler | 31 |
| 3.6 | Encurvadura de Colunas Total ou Parcialmente Enterradas | 32 |
| 3.7 | Modelos Numéricos | 37 |
| 3.7.1 | Relação Constitutiva do Betão | 37 |
| 3.7.2 | Elementos Frame | 37 |
| 3.8 | Verificação dos Modelos | 38 |
| 4 | Casos de Estudo | 41 |
| 4.1 | Geometria dos Pilares-Estaca, Discretização e Hipóteses Simplificativas | 41 |
| 4.2 | Condições de Fronteira e Dados dos Ensaios SPT | 45 |
| 5 | Resultados | 49 |
| 5.1 | Casos de Estudo Pilar SVA3 | 49 |
| 5.1.1 | Direção Transversal | 49 |
| 5.1.2 | Direção Longitudinal | 52 |
| 5.2 | Casos de Estudo Pilar SVA4 | 54 |
| 5.2.1 | Direção Transversal | 54 |
| 5.2.2 | Direção Longitudinal | 57 |
| 5.3 | Casos de Estudo Pilar SVA16 | 59 |
| 5.3.1 | Direção Transversal | 59 |
| 5.3.2 | Direção Longitudinal | 62 |
| 6 | Conclusões e desenvolvimentos futuros | 65 |
| 6.1 | Conclusões | 65 |
| 6.2 | Desenvolvimentos futuros | 65 |
| | Bibliografia | 67 |
| A | Programa Desenvolvido com Base no Método de Elementos Finitos ([1] e [2]) | 69 |
| B | Geometria dos Pilares-Estaca Analisados | 79 |
| C | Modos de Encurvadura Determinados com o Programa SAP2000 | 85 |

Índice de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Tipos de Equilíbrio | 3 |
| 2.2 | Coluna de Euler | 4 |
| 2.3 | Trajetoórias de Equilíbrio adaptado de [3] | 5 |
| 2.4 | Trajetoórias de Equilíbrio da Coluna de Euler | 6 |
| 2.5 | Diagrama Carga-Deslocamento: Trajetórias de Equilíbrio e Ponto de Bifurcação | 7 |
| 2.6 | Deformadas "Clássicas": condições de fronteira e cargas críticas [13] | 8 |
| 2.7 | Não Linearidade Geométrica [3] | 10 |
| 2.8 | Trajetoórias de Equilíbrio de Sistemas Ideais e Reais [3] | 11 |
| 3.1 | Tipos de Fundação: a) Superficial; b) Profunda; c) de Retenção [1] | 14 |
| 3.2 | Equipamentos utilizados nos ensaios SPT [1] | 16 |
| 3.3 | Ensaio de carga com placa de teste [1] | 17 |
| 3.4 | Relação Tensão-Deslocamento e correspondente cálculo de k_s [1] | 17 |
| 3.5 | Esforços nas Faces da Estaca [1] | 19 |
| 3.6 | Viga em Meio Elástico | 21 |
| 3.7 | Viga Discretizada | 23 |
| 3.8 | Equilíbrio nos Nós | 24 |
| 3.9 | Composição da Matriz A | 25 |
| 3.10 | Pilar-Estaca com Dois Lintéis | 25 |
| 3.11 | Equilíbrio nos Nós (Pilar-Estaca com Dois Lintéis) | 26 |
| 3.12 | Composição da Matriz A (Pilar-Estaca com Dois Lintéis) | 26 |
| 3.13 | Pilar-Estaca com Deslocamento Restringido no Topo | 27 |
| 3.14 | Equilíbrio nos Nós (Pilar-Estaca com Deslocamento Lateral Restringido no Topo) | 27 |

Índice de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 3.15 | Matriz A com Deslocamento Lateral Restringido no Topo | 28 |
| 3.16 | Deslocamentos, Rotações e Deformações do Primeiro Elemento da Viga da Figura 3.7 . . | 28 |
| 3.17 | Composição da Matriz B | 29 |
| 3.18 | Forças de Fixação num Elemento de Viga [1] | 30 |
| 3.19 | Matriz de Rigidez (S) | 30 |
| 3.20 | Molas de Winkler (Zona Enterrada do Pilar) | 31 |
| 3.21 | Exemplo de coluna parcialmente apoiada em meio elástico (solo) | 32 |
| 3.22 | Disposição da Matriz D | 33 |
| 3.23 | Elaboração da Matriz G | 34 |
| 3.24 | Composição da Matriz de Segunda Ordem G (de Rigidez Geométrica) | 34 |
| 3.25 | Fluxograma para Determinação de Cargas Críticas | 36 |
| 3.26 | Coluna apoiada em molas de Winkler | 38 |
| 3.27 | Coluna simplesmente apoiada | 39 |
| 4.1 | Vistas dos pilares do viaduto e sua geometria (m) [9] | 42 |
| 4.2 | Geometria dos lintéis (m) | 42 |
| 4.3 | Discretização Geral dos Pilares | 43 |
| 4.4 | Condições de Fronteira na Direção Longitudinal | 45 |
| 4.5 | Condições de Fronteira na Direção Transversal | 46 |
| 4.6 | Molas helicoidais Correspondentes aos Lintéis | 47 |
| 4.7 | Dados SPT Relativos ao Pilar SVA3 | 47 |
| 4.8 | Dados SPT Relativos ao Pilar SVA4 | 48 |
| 4.9 | Dados SPT Relativos ao Pilar SVA16 | 48 |
| 5.1 | Deformada do 1º Modo SVA3-2L | 49 |
| 5.2 | Deformada do 2º Modo SVA3-2L | 50 |
| 5.3 | Deformada do 1º Modo SVA3-LT | 50 |
| 5.4 | Deformada do 2º Modo SVA3-LT | 51 |
| 5.5 | Deformada do 1º Modo SVA3-LF | 51 |
| 5.6 | Deformada do 2º Modo SVA3-LF | 52 |
| 5.7 | Deformada do 1º Modo SVA3-S.A. | 52 |
| 5.8 | Deformada do 2º Modo SVA3-S.A. | 53 |
| 5.9 | Deformada do 1º Modo SVA3-F. | 53 |
| 5.10 | Deformada do 2º Modo SVA3-F. | 54 |
| 5.11 | Deformada do 1º Modo SVA4-2L | 54 |
| 5.12 | Deformada do 2º Modo SVA4-2L | 55 |
| 5.13 | Deformada do 1º Modo SVA4-LT | 55 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.14 | Deformada do 2º Modo SVA4-LT | 56 |
| 5.15 | Deformada do 1º Modo SVA4-LF | 56 |
| 5.16 | Deformada do 2º Modo SVA4-LF | 57 |
| 5.17 | Deformada do 1º Modo SVA4-S.A. | 57 |
| 5.18 | Deformada do 2º Modo SVA4-S.A. | 58 |
| 5.19 | Deformada do 1º Modo SVA4-F. | 58 |
| 5.20 | Deformada do 2º Modo SVA4-F. | 59 |
| 5.21 | Deformada do 1º Modo SVA16-2L | 59 |
| 5.22 | Deformada do 2º Modo SVA16-2L | 60 |
| 5.23 | Deformada do 1º Modo SVA16-LT | 60 |
| 5.24 | Deformada do 2º Modo SVA16-LT | 61 |
| 5.25 | Deformada do 1º Modo SVA16-LF | 61 |
| 5.26 | Deformada do 2º Modo SVA16-LF | 62 |
| 5.27 | Deformada do 1º Modo SVA16-S.A. | 62 |
| 5.28 | Deformada do 2º Modo SVA16-S.A. | 63 |
| 5.29 | Deformada do 1º Modo SVA16-F. | 63 |
| 5.30 | Deformada do 2º Modo SVA16-F. | 64 |
| | | |
| B.1 | Pilar SVA3: Zona Acima do Solo | 79 |
| B.2 | Pilar SVA3: Zona Enterrada no Solo | 80 |
| B.3 | Pilar SVA4: Zona Acima do Solo | 81 |
| B.4 | Pilar SVA4: Zona Enterrada no Solo | 82 |
| B.5 | Pilar SVA16: Zona Acima do Solo | 83 |
| B.6 | Pilar SVA16: Zona Enterrada no Solo | 84 |
| | | |
| C.1 | Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA3-S.A.) | 85 |
| C.2 | Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA3-S.A.) | 85 |
| C.3 | Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA3-F.) | 86 |
| C.4 | Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA3-F.) | 86 |
| C.5 | Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA3-LF) | 86 |
| C.6 | Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA3-LF) | 87 |
| C.7 | Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA4-2L) | 87 |
| C.8 | Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA4-2L) | 87 |
| C.9 | Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA4-LT) | 88 |
| C.10 | Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA4-LT) | 88 |
| C.11 | Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA4-LF) | 88 |
| C.12 | Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA4-LF) | 89 |

Índice de Figuras

| | |
|--|----|
| C.13 Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA4-S.A.) | 89 |
| C.14 Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA4-S.A.) | 89 |
| C.15 Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA4-F.) | 90 |
| C.16 Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA4-F.) | 90 |
| C.17 Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA16-2L) | 90 |
| C.18 Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA16-2L) | 91 |
| C.19 Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA16-LT) | 91 |
| C.20 Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA16-LT) | 91 |
| C.21 Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA16-LF) | 92 |
| C.22 Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA16-LF) | 92 |
| C.23 Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA16-S.A.) | 92 |
| C.24 Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA16-S.A.) | 93 |
| C.25 Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA16-F.) | 93 |
| C.26 Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA16-F.) | 93 |

Índice de Tabelas

| | | |
|------|--|----|
| 3.1 | Valores de F_w | 20 |
| 3.2 | Cargas Críticas (Exercício de Verificação) | 39 |
| 3.3 | Diferenças nos Resultados dos Modelos Elaborados | 40 |
| 4.1 | Discretização Pilar SVA3 | 43 |
| 4.2 | Discretização Pilar SVA4 | 44 |
| 4.3 | Discretização Pilar SVA16 | 44 |
| 5.1 | Resultados Pilar SVA3 com Dois Lintéis (2L) | 49 |
| 5.2 | Resultados Pilar SVA3 com Lintel de Topo (LT) | 50 |
| 5.3 | Resultados Pilar SVA3 com Lintel de Fundo (LF) | 51 |
| 5.4 | Resultados Pilar SVA3 Simplesmente Apoiado (S.A.) | 52 |
| 5.5 | Resultados Pilar SVA3 Apoio Fixo (F.) | 53 |
| 5.6 | Resultados Pilar SVA4 com Dois Lintéis (2L) | 54 |
| 5.7 | Resultados Pilar SVA4 com Lintel de Topo (LT) | 55 |
| 5.8 | Resultados Pilar SVA4 com Lintel de Fundo (LF) | 56 |
| 5.9 | Resultados Pilar SVA4 Simplesmente Apoiado (S.A.) | 57 |
| 5.10 | Resultados Pilar SVA4 Apoio Fixo (F.) | 58 |
| 5.11 | Resultados Pilar SVA16 com Dois Lintéis (2L) | 59 |
| 5.12 | Resultados Pilar SVA16 com Lintel de Topo (LT) | 60 |
| 5.13 | Resultados Pilar SVA16 com Lintel de Fundo (LF) | 61 |
| 5.14 | Resultados Pilar SVA16 Simplesmente Apoiado (S.A.) | 62 |
| 5.15 | Resultados Pilar SVA16 Apoio Fixo (F.) | 63 |

Lista de Abreviaturas, Siglas e Símbolos

Siglas

UNL Universidade Nova de Lisboa

Índices

$()_s$ relativo ao solo

$()_E$ relativo à carga crítica de Euler

$()_{cr}$ valor crítico de bifurcação

$()^{cr}$ valor crítico de bifurcação

$()_F$ relativo a força

Letras Latinas Maiúsculas

E módulo de elasticidade

I momento de inércia

N número de ensaio SPT

M momento fletor

Q esforço de corte normal ao eixo de flexão

P carga axial

C constante condição de fronteira

L comprimento da coluna

W deslocamento transversal

Lista de Abreviaturas, Siglas e Símbolos

Letras Latinas Minúsculas

q deslocamento transversal

e excentricidade de carga

\bar{x} coordenada longitudinal a partir da base da coluna

\bar{w} deslocamento transversal

k módulo de reação do solo

x coordenada da coluna a partir da base

Letras Gregas

λ parâmetro de carga

σ tensão na peça

μ coeficiente de Poisson

α critério de estabilidade

δ pequena perturbação

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivações e Objetivos

Os desenvolvimentos tecnológicos e os avanços no conhecimento do comportamento e das propriedades do betão armado permitem a aplicação deste material de formas cada vez mais económicas. Deste modo, tem-se verificado uma tendência para projetar e construir elementos estruturais de betão armado com maior esbelteza. Em projeto, recentemente a solução de pilares-estaca tem sido mais frequentemente adotada por razões económicas uma vez que esta solução elimina a necessidade de maciço de encabeçamento. Contudo, pilares mais esbeltos são mais suscetíveis à encurvadura e devem ser analisados com maior rigor.

A utilização de betão armado em estruturas de apoio para pontes e viadutos é muito comum e tem vindo a aumentar nas últimas décadas. Deste modo, surgem mais frequentemente situações em que o pilar apresenta na sua geometria uma parte livre e outra soterrada e confinada pelo solo [14]. Mediante determinadas condições, podem ocorrer fenómenos de instabilidade por encurvadura quando as peças estão sujeitas a compressões, pelo que se impõe um estudo detalhado do problema, de forma a evitar que a segurança da estrutura e dos seus utilizadores seja posta em causa em qualquer momento.

Esta dissertação tem como principal objetivo a determinação do comprimento de encurvadura e da respetiva carga crítica de encurvadura que instabiliza o elemento analisado. Este cálculo é essencial para o dimensionamento dos pilares, pois o mesmo depende não apenas da carga última ou de plastificação mas também da carga crítica do elemento estudado.

De forma a atingir os objetivos propostos na dissertação, foram considerados dois métodos alternativos de análise: uma primeira abordagem utilizando uma formulação por Elementos Finitos sugerida em [1] e [2], aplicada recorrendo ao programa wxMaxima [12] e uma segunda abordagem utilizando o programa de cálculo automático SAP2000 [10].

Estas duas análises foram aplicadas em vários casos de estudo, sendo que cada caso de estudo corresponde a pilares-estaca distintos de modo a contemplar diferentes geometrias comuns em viadutos

semelhantes ao considerado no âmbito desta dissertação [9].

1.2 Organização do Trabalho

Esta dissertação encontra-se dividida em 6 capítulos.

No primeiro capítulo, introduz-se o leitor ao tema deste trabalho, referindo os objetivos e motivações que conduziram à elaboração da dissertação assim como a sua organização.

O segundo capítulo consiste numa breve resenha teórica, sendo referidos diversos fundamentos relativos à instabilidade estrutural e à determinação de comprimentos de encurvadura.

No terceiro capítulo, é descrita a metodologia de análise aplicada ao problema em questão.

No quarto capítulo, apresentam-se os casos de estudo adotados sobre os quais serão aplicadas as metodologias do terceiro capítulo.

No quinto capítulo, apresentam-se e discutem-se os resultados das análises realizadas.

No sexto capítulo apresentam-se as conclusões globais extraídas do trabalho desenvolvido, sugerem-se ainda futuros desenvolvimentos para aprofundamento deste tópico.

Capítulo 2

Estabilidade Estrutural de Colunas: Conceitos Fundamentais

2.1 Introdução

No processo de dimensionamento, projeto e análise de estruturas, surgem associados os conceitos de estabilidade e de equilíbrio. Qualquer estrutura sujeita a um conjunto de forças externas possui uma configuração de equilíbrio dada pelos deslocamentos dos pontos que a constituem. Essa configuração é designada por configuração deformada e pode ser estudada quanto à sua estabilidade. O estudo da estabilidade da estrutura é determinado pela capacidade desta regressar ou não à sua configuração deformada inicial quando sujeita a uma pequena “perturbação”. Quando a ação dessa “perturbação” ou força cessa, caso a estrutura regresse à sua posição inicial, a configuração de equilíbrio diz-se “estável”; caso contrário, o equilíbrio designa-se “instável”.

O conceito de estabilidade do equilíbrio pode ser facilmente visualizado ao se considerar uma esfera rígida sujeita ao seu próprio peso e em repouso sobre três superfícies distintas: uma superfície côncava que representa o equilíbrio estável (A); uma superfície convexa que representa o equilíbrio instável (B) e uma terceira esfera que repousa sobre uma superfície lisa o que equivale ao equilíbrio neutro (C).

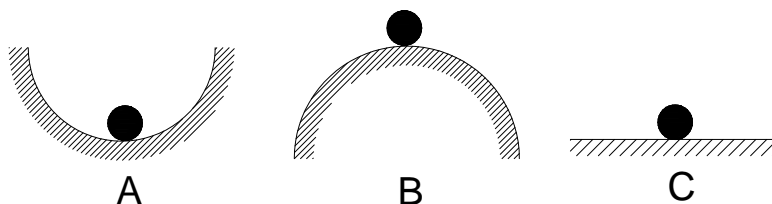


Figura 2.1: Tipos de Equilíbrio

Ao projetar uma estrutura têm de ser considerados, não só os aspetos de segurança relacionados com a resistência e capacidade de deformação dos elementos que constituem a estrutura, como também é necessário ter em conta os aspetos relativos à segurança da estabilidade do equilíbrio, assumindo estes um papel igualmente importante. Os fenómenos que surgem associados à estabilidade das estruturas assumem a designação de “fenómenos de instabilidade estrutural”. De forma a garantir a segurança de qualquer estrutura relativamente a estes fenómenos de instabilidade, recorre-se ao método dos estados limite [11], sendo que a instabilidade estrutural está incluída no grupo dos estados limite últimos uma vez que, caso não esteja devidamente precavida, leva ao colapso global ou local da estrutura. Os correspondentes estados limite são frequentemente designados por “estados limite de instabilidade”, sendo o termo “encurvadura” vulgarmente utilizado para caracterizar em projeto de estruturas os fenómenos de instabilidade estrutural.

2.2 Instabilidade Estrutural Bifurcacional

Por forma a ilustrar os conceitos apresentados na seção anterior, considere-se a coluna elástica simplesmente apoiada sujeita a uma carga axial P . Esta coluna, representada na Figura 2.2, é designada por “Coluna de Euler”.

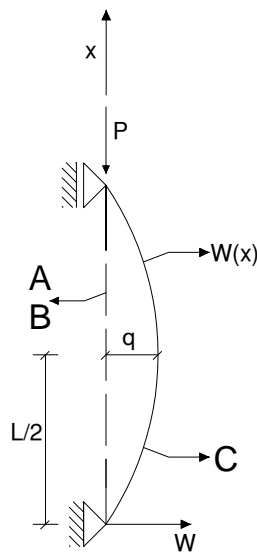


Figura 2.2: Coluna de Euler

A coluna de Euler apresenta as trajetórias de equilíbrio ilustradas na Figura 2.3, onde, no eixo das abcissas q representa o deslocamento transversal a meio vão e no eixo das ordenadas P representa o valor da carga axial a que a coluna está sujeita.

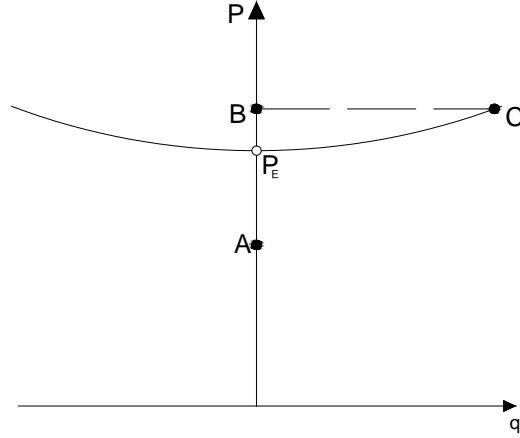


Figura 2.3: Trajetórias de Equilíbrio adaptado de [3]

É possível observar que existe uma trajetória de equilíbrio (trajetória fundamental) para o qual o deslocamento q é nulo até ser atingido um determinado valor de P , a partir do qual passam a existir valores de deslocamento não nulos. Têm-se então duas trajetórias, uma “fundamental” e outra de “pós-encurvadura”. As duas trajetórias encontram-se no ponto $q = 0$ e $P = P_E$, o qual representa uma bifurcação no equilíbrio da estrutura. P_E é designado por carga crítica de Euler e o seu valor é dado por [3]:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.1)$$

O modo de instabilidade correspondente é dado por:

$$W(x) = q \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (2.2)$$

- W - Deslocamento transversal;
- P_E - Carga crítica de Euler;
- E - Módulo de elasticidade do material;
- I - Momento de inércia da seção em relação ao eixo de flexão;
- EI - Rigidez de flexão da seção transversal da coluna;
- L - Comprimento da coluna.

Considere-se agora a Figura 2.4 onde se representa a mesma coluna de Euler em três situações distintas, atuada a meio vão por uma força δ_F que representa apenas uma "perturbação". As duas primeiras situações correspondem à trajetória fundamental (A e B) e a terceira encontra-se na trajetória pós-encurvadura (C).

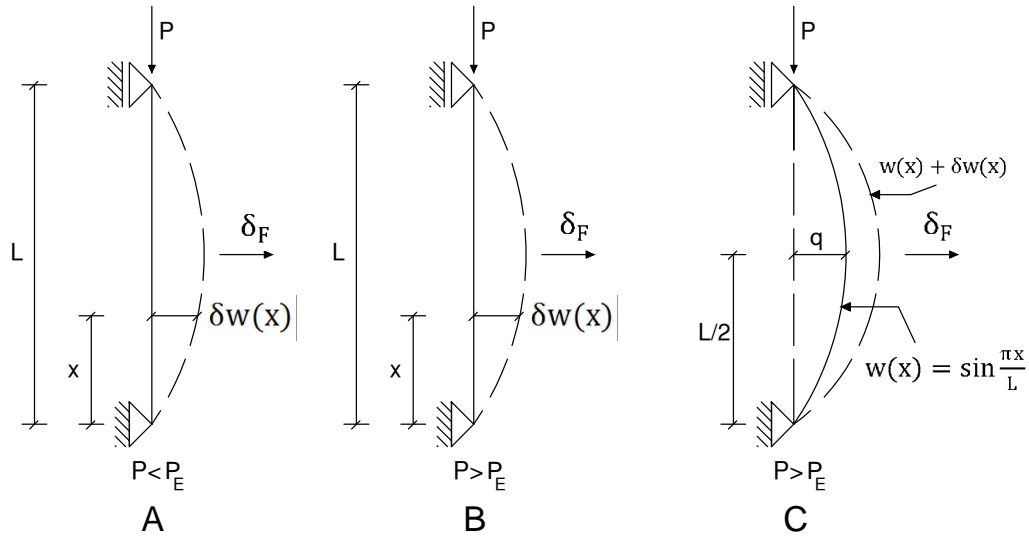


Figura 2.4: Trajetórias de Equilíbrio da Coluna de Euler

Na situação A, constata-se que, após a ação da força δ_F , a coluna regressa à configuração inicial, pelo que o equilíbrio ilustrado na coluna A corresponde a um equilíbrio estável. Na situação B, pelo contrário, após a atuação da força δ_F , a coluna afasta-se da sua configuração inicial e adquire a configuração da situação C que se encontra em equilíbrio estável. Este fenómeno de instabilidade estrutural é designado de instabilidade por “snap-through” e foge ao âmbito desta tese, pelo que não será abordado.

A trajetória da coluna na situação A, pelo aumento da força P , passa da trajetória fundamental em que não existem deslocamentos, para a trajetória de pós-encurvadura, adquirindo a configuração da coluna na situação C.

Este tipo de instabilidade é designado por instabilidade bifurcacional, dado que ocorre uma bifurcação de equilíbrio definida pela carga crítica de Euler [3].

O fenómeno de instabilidade bifurcacional é pois caracterizado por uma trajetória fundamental de equilíbrio iniciada na origem do diagrama carga-deslocamento, uma trajetória pós-encurvadura que não passa na origem do gráfico carga-deslocamento e um ponto de bifurcação determinado pela interseção das duas trajetórias e a partir do qual as configurações da trajetória fundamental passam de estáveis a instáveis. Considerando o gráfico representado na Figura 2.5 é possível visualizar as trajetórias envolvidas na instabilidade bifurcacional.

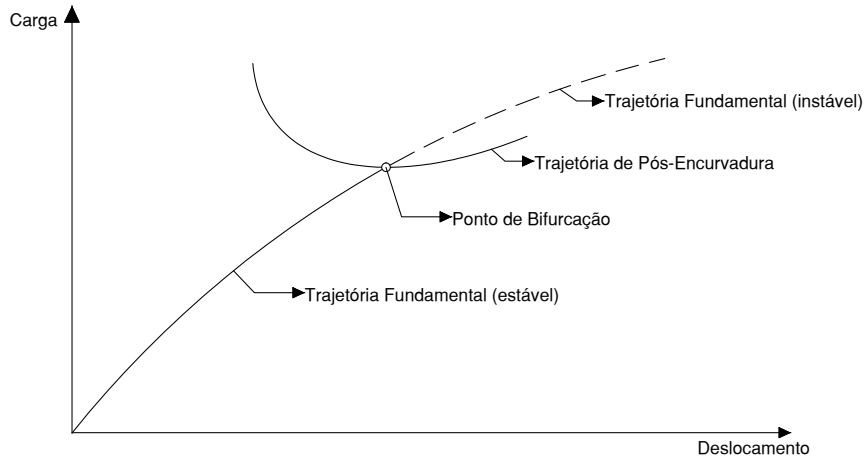


Figura 2.5: Diagrama Carga-Deslocamento: Trajetórias de Equilíbrio e Ponto de Bifurcação

Este fenómeno é de uma natureza brusca, uma vez que os deslocamentos que caracterizam o modo de instabilidade de uma estrutura são nulos enquanto esta se encontra sobre a sua trajetória fundamental e surgem de forma abrupta quando o ponto de bifurcação é atingido. Consequentemente apenas se torna possível prever um fenómeno com estas características adotando uma análise que antecipe estes deslocamentos, pelo que as equações de equilíbrio do sistema são formuladas partindo da configuração deformada da estrutura e considerando os deslocamentos devidos à flexão da peça.

2.3 Soluções Clássicas de Encurvadura

Para demonstrar as equações (2.1) e (2.2), considere-se uma coluna, com rigidez de flexão EI e comprimento L sujeita a uma carga axial P . A equação que relaciona o seu deslocamento transversal com o momento fletor é dada por:

$$M = -EI \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \quad (2.3)$$

Sendo \bar{w} o deslocamento transversal, \bar{x} a coordenada longitudinal a partir da base da coluna e M o momento fletor.

Considerando o teorema de Euler-Bernoulli para vigas, assume-se que o plano normal à seção da peça permanece plana e normal ao eixo central após a flexão da mesma [13]. Desta forma, sendo Q o esforço de corte normal ao eixo de flexão, estabelecem-se as equações de equilíbrio:

$$\frac{dM}{d\bar{x}} = Q \quad (2.4)$$

$$\frac{dQ}{d\bar{x}} = P \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \quad (2.5)$$

Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.5), obtém-se a seguinte equação governativa de encurvadura:




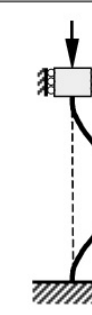

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \alpha \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \alpha = \frac{PL^2}{EI} \quad (2.6)$$

em que $w = \frac{\bar{w}}{L}$ e $x = \frac{\bar{x}}{L}$

A solução geral de (2.6) é

$$w = C_1 \sin \sqrt{\alpha} x + C_2 \cos \sqrt{\alpha} x + C_3 x + C_4 \quad (2.7)$$

Ao resolver a equação homogênea (2.6), os termos de C_1 a C_4 dependem das condições de fronteira consideradas. Na tabela da Figura 2.6 ilustra-se de forma concisa as diferentes configurações deformadas possíveis, com as respectivas condições de fronteira e cargas críticas.

| Classical Cases | C-F Column | P-P Column | C-P Column | C-C Column | C-S Column |
|------------------------|---|---|---|---|---|
| Buckled shape |  |  |  |  |  |
| Stability Criterion | $\cos \sqrt{\alpha} = 0$ | $\sin \sqrt{\alpha} = 0$ | $\sqrt{\alpha} = \tan \sqrt{\alpha}$ | $\sin \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = 0$ | $\cos \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = 0$ |
| Critical Buckling Load | $\alpha = \frac{\pi^2}{4}$ | $\alpha = \pi^2$ | $\alpha = 2.0457\pi^2$ | $\alpha = 4\pi^2$ | $\alpha = \pi^2$ |

C = clamped (fixed); F = free; P = pinned; S = sliding restraint.

Figura 2.6: Deformadas "Clássicas": condições de fronteira e cargas críticas [13]

2.4 Tipos de Análise

O principal objetivo da Teoria de Estruturas é a determinação do comportamento das estruturas quando submetidas a um conjunto de ações, assim como a interação que existe entre essas ações e os efeitos que as mesmas provocam na estrutura como tensões, deformações ou deslocamentos. Por forma a determinar este comportamento, é necessário ter em conta variados tipos de equações. As primeiras equações a estabelecer são as equações de equilíbrio, que envolvem forças aplicadas, esforços e tensões. As relações constitutivas são equações que relacionam tensões com deformações e que caracterizam o comportamento do material constituinte da estrutura. As equações cinemáticas permitem estabelecer relações entre as deformações e os deslocamentos. Por fim as equações de compatibilidade garantem que a estrutura não viola as ligações entre os seus elementos nem as suas ligações ao exterior (apoios), quando sujeita a deslocamentos [3].

O comportamento linear, que resulta numa análise estrutural simplificada denominada “análise linear de estruturas”, tem como bases a linearidade física, que considera relações constitutivas lineares, ou seja, os materiais não atingem o patamar de cedência, permanecendo em regime elástico; e a linearidade geométrica que está associada a equações de equilíbrio estabelecidas na configuração indeformada da estrutura e relações cinemáticas lineares, adotando a “hipótese dos pequenos deslocamentos”.

No entanto, atendendo a que a natureza dos fenómenos de instabilidade é intrinsecamente geometricamente não linear, uma análise linear das estruturas impossibilita a deteção de fenómenos de instabilidade. Desta forma, a elaboração de qualquer estudo da estabilidade de estruturas obriga a que sejam estabelecidas equações de equilíbrio na configuração deformada e se considerem relações cinemáticas não lineares.

Para ilustrar o ponto anteriormente referido, considere-se a Figura 2.7, onde se representa um pilar submetido a uma ação vertical de compressão de valor P desviada do eixo do pilar de uma excentricidade “ e ”. No diagrama carga-deslocamento observa-se que, para valores elevados de P , o erro nos valores dos deslocamento obtidos através de uma análise linear pode ser significativo e contra a segurança.

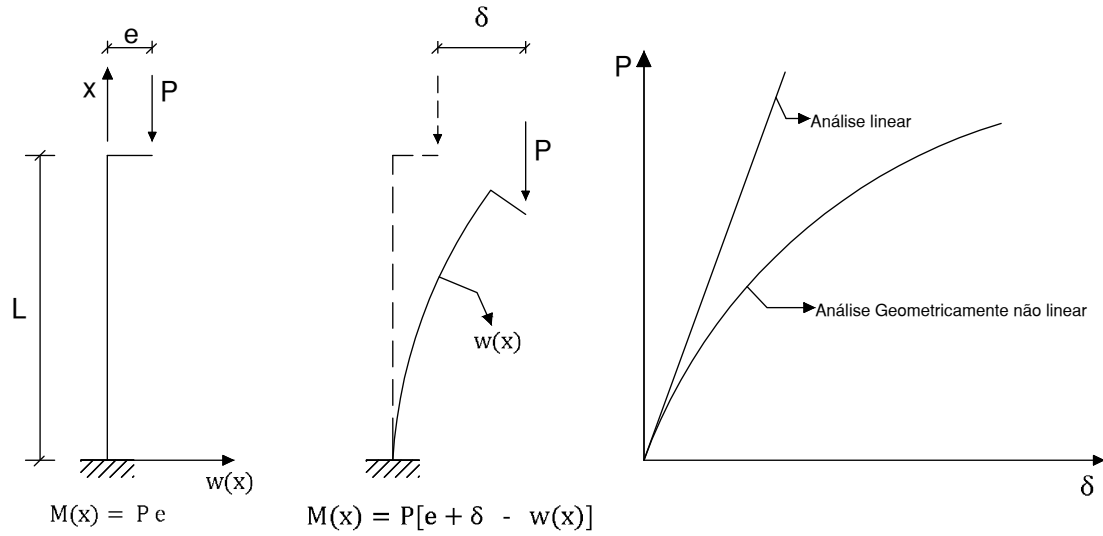


Figura 2.7: Não Linearidade Geométrica [3]

No respeitante à linearidade física, no âmbito deste trabalho admite-se que a mesma é verificada, uma vez que nos casos apresentados, consideram-se elementos de betão, pelo que a análise de estabilidade em regime elasto-plástico implicaria a consideração da fendilhação do betão, com possível formação de rótulas plásticas; dado que os pilares-estaca geralmente se encontram fundados em meios saturados, as armaduras estariam expostas a possíveis efeitos corrosivos. Todos estes fenómenos aumentam a complexidade do problema e estão fora do horizonte deste estudo, pelo que se considera uma análise de estabilidade elástica (fisicamente linear).

A determinação da solução exata de trajetórias de equilíbrio, isto é, a descrição exata do comportamento geometricamente não linear do sistema, apenas é possível em problemas relativamente simples. Geralmente determinam-se aproximações desse comportamento válidas para valores “pequenos” dos parâmetros de deformação.

Existem variados tipos de análises de estabilidade, que contemplam diferentes níveis de aproximação nas equações. Assim, em geral torna-se necessário adotar hipóteses simplificativas de aproximação do sistema em estudo, as quais devem ter em conta o comportamento de sistemas estruturais reais.

Os sistemas estruturais reais possuem imperfeições geométricas iniciais, como pequenos deslocamentos ou excentricidades de carga. Na Figura 2.8 está ilustrado o efeito de tais imperfeições.

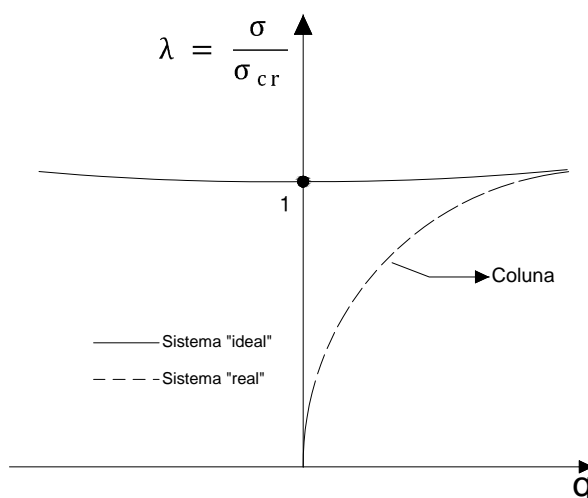


Figura 2.8: Trajetórias de Equilíbrio de Sistemas Ideais e Reais [3]

A linha a tracejado representa a trajetória de equilíbrio de sistemas reais, constatando-se que a bifurcação de equilíbrio não se verifica; ao invés, existe uma trajetória de equilíbrio contínua. No entanto, verifica-se também que o andamento da trajetória “real” está de certa forma próximo das trajetórias fundamental e pós-encurvadura do sistema “perfeito”. O comportamento do sistema real de uma coluna, no que diz respeito à carga crítica de bifurcação determinada pelo sistema “perfeito”, fornece pois uma estimativa que se pode considerar razoavelmente próxima da capacidade de carga dessa mesma coluna “real”.

2.4.1 Análise Linear de Estabilidade

É muito frequente em problemas de instabilidade bifurcacional encontrar situações em que a estrutura apresenta uma trajetória fundamental linear e somente se pretende determinar a carga de bifurcação e os seus modos de instabilidade. Desta forma, é em geral satisfatório efetuar uma análise linear de estabilidade do sistema estrutural, em que são estabelecidas as equações de equilíbrio na configuração de deformada e em seguida se linearizam essas mesmas equações em relação aos deslocamentos que caracterizam os modos de instabilidade. No fundo, é estabelecido o conjunto de equações de equilíbrio assumindo uma deformada desviada apenas ligeiramente da trajetória fundamental. Este tipo de análise não permite obter, contudo, qualquer informação sobre as trajetórias de pós-encurvadura, sendo contudo suficiente para determinar a carga de bifurcação, ou carga crítica, que é dada pela menor carga de bifurcação, a que corresponde o modo crítico de instabilidade.

Todas as estruturas reais são sistemas contínuos; no entanto, é geralmente necessário simular o comportamento da estrutura através de sistemas discretos em que a configuração de deformada é definida por um conjunto finito de graus de liberdade. Assim, é frequente a utilização de métodos

numéricos de análise de estruturas que substituam o sistema estrutural contínuo por um sistema estrutural discreto.

2.4.2 Métodos de Cálculo Aproximados

Praticamente, com exceção de determinados problemas razoavelmente simples, todos os sistemas estruturais contínuos exigem a utilização de métodos aproximados, de forma a poder solucionar as equações diferenciais de equilíbrio que governam a instabilidade estrutural desses mesmos sistemas. Estes métodos substituem o sistema real contínuo por um sistema discreto relativamente próximo do real, pelo que a solução do problema de estabilidade do sistema discretizado é uma aproximação da solução exata que corresponde ao sistema real contínuo. Quanto maior for o grau de aproximação do sistema discreto ao sistema real, melhor será a qualidade da solução obtida.

Existem duas categorias de métodos de cálculo aproximados: os métodos que aplicam uma aproximação às equações diferenciais de equilíbrio e os que introduzem uma aproximação à energia potencial do sistema, sendo que este segundo tipo de métodos apenas pode ser aplicado em problemas conservativos (onde a energia potencial é positiva [3] e [15]).

Os principais métodos referentes à primeira categoria são o método das diferenças finitas, o método de Engesser-Newmark e o método de Galerkin [3]. Exemplos de métodos referentes à segunda categoria são o método de Rayleigh-Ritz e o método dos Elementos Finitos.

No âmbito desta tese, foi decidido utilizar o método dos Elementos Finitos, pelo que os restantes métodos anteriormente indicados são aqui referidos a título meramente informativo. No capítulo seguinte, procede-se à introdução dos fundamentos necessários à aplicação do método dos Elementos Finitos ao problema em estudo seguindo a metodologia proposta em [1] e [2].

Capítulo 3

Metodologia Aplicada

3.1 Introdução

No presente capítulo, são abordados diversos aspectos necessários à compreensão da metodologia adotada. É dada particular atenção à geometria e tipo de fundação de pilares-estaca, às propriedades e modelos de análise do solo de fundação, às características do material utilizado na construção de pilares-estaca e à formulação numérica de Elementos Finitos utilizada nos casos de estudo.

É ainda discutido o tipo de modelação adotada para analisar os casos de estudo no programa de cálculo automático SAP2000, utilizando elementos de barra (*Frame*).

3.2 Fundação

Todas as estruturas têm como base de suporte um elemento estrutural designado por fundação ou subestrutura. Esta base de suporte funciona como uma interface entre a superestrutura e o solo ou rocha, transmitindo as cargas impostas pela superestrutura.

Existem três principais tipos de fundação: fundações superficiais, que geralmente não atingem profundidades elevadas; estruturas de retenção, como muros de suporte ou muros de gravidade; e fundações profundas em que os pilares-estaca estão incluídos. A superestrutura transmite às fundações cargas de compressão que podem atingir até 140 MPa no caso de estruturas metálicas e 10 MPa em estruturas de betão. A capacidade de suporte das fundações muito raramente atinge 1000 KPa e geralmente não ultrapassa 250 KPa. Note-se que as fundações são responsáveis por assegurar a interface entre dois tipos de materiais cujo rácio de resistência é da ordem das dezenas, no caso de estruturas em betão, e das centenas no caso de estruturas metálicas. É imperativo pois que as fundações distribuam eficientemente as cargas que a superestrutura transmite para o solo, de forma a que as tensões não produzam deformações excessivas. As fundações superficiais cumprem esta função distribuindo as cargas horizontalmente pelo solo enquanto que as fundações profundas fazem-

no distribuindo as cargas gradualmente na vertical ou encaminhando-as para um estrato mais profundo e resistente.

Na Figura 3.1 apresentam-se esquematicamente os três tipos de fundação referidos acima, bem como o modo como se dissipam as solicitações da superestrutura.

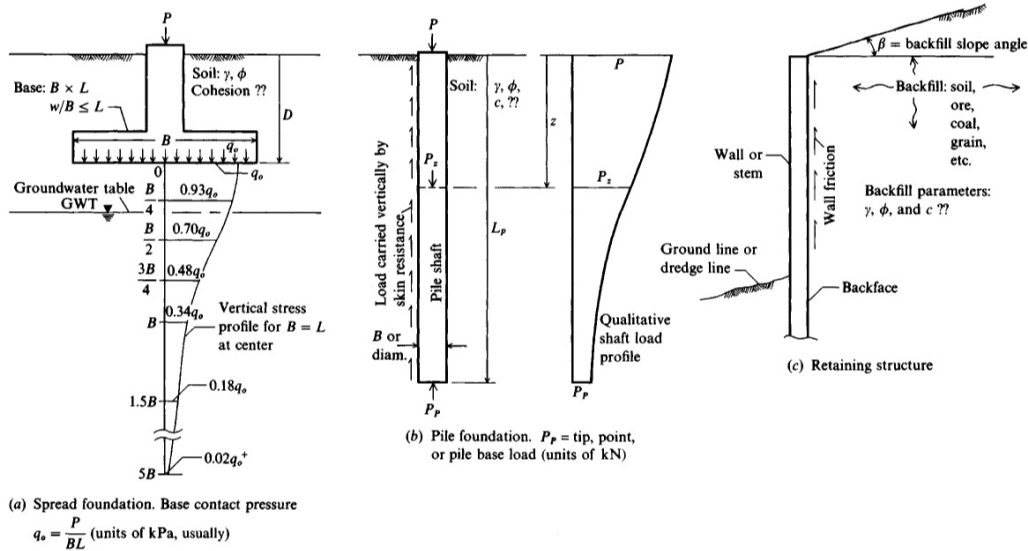


Figura 3.1: Tipos de Fundação: a) Superficial; b) Profunda; c) de Retenção [1]

O projeto das fundações de uma determinada estrutura envolve diferentes fases. Primeiramente, é preciso conhecer a posição das cargas e os seus valores. De seguida, há que inspecionar o local de forma a poder recolher informação e sugerir um tipo de fundação recomendado para projetar. Convém também conduzir um programa de exploração no local com realização de ensaios de campo e recolha de amostras que serão analisadas em laboratório, de forma a identificar com exatidão o tipo de solo ou rocha existente no local. Finalmente decide-se o tipo de fundação a projetar com base no tipo de solo ou rocha e no sistema de cargas que a subestrutura terá de transmitir. Em geral as fundações tipo pilar-estaca são utilizadas quando o solo tem pouca capacidade de suporte a profundidades reduzidas, sendo necessário fundar a grande profundidade para garantir a resistência.

3.3 Exploração e Análise do Solo

A exploração do solo tem como objetivo determinar a estratificação e as propriedades do solo, assim como as suas características hidráulicas e a sua deformabilidade. Esta investigação é um pré-requisito para o projeto de qualquer elemento de subestrutura, não só por proporcionar informação necessária à escolha do tipo de subestrutura a utilizar como também por fornecer elementos necessários em termos de orçamentação e de execução do projeto a ser proposto. Devem ser efetuados suficientes testes e

análises laboratoriais de forma a prever com razoável segurança possíveis assentamentos diferenciais e a capacidade de suporte do solo.

É importante ainda obter informação sobre a possível ocorrência de problemas durante a execução da obra, como laminação, desaguamento do solo, identificação do nível freático e questões de natureza ambiental.

O método mais comum de exploração do solo é o designado método Auger (abertura de trados ou furos) que consiste na perfuração do solo até um máximo de cerca de trinta metros de profundidade. Para uma exploração mais profunda podem ser utilizados equipamentos específicos, nomeadamente brocas de percussão ou rotativas que podem atingir profundidades de aproximadamente setenta metros.

Os métodos de análise de solos dividem-se em duas categorias, os que analisam amostras intactas e os que trabalham com amostras perturbadas. Na prática, retirar amostras intactas do solo é uma tarefa delicada, pois as amostras têm sempre algum grau de perturbação quando são recolhidas. Atendendo ainda que existem solos coesivos e não coesivos, a tarefa de retirar amostras intactas de solos não coesivos é extremamente difícil, pois qualquer alteração na condição envolvente após o solo ser retirado do local pode influenciar grandemente a sua análise, sendo suficiente muitas vezes o simples transporte para o laboratório para que tal aconteça. Deste modo, a extração de amostras não perturbadas exige cuidados especiais aquando da sua extração, de forma a minimizar a perturbação das condições *in situ*. Tais amostras são particularmente úteis para determinar o peso volúmico ou a densidade relativa do solo. Para amostras de solo coesivo, é também habitual determinar o grau de consolidação do solo.

Em todo o caso, tendo em conta os aspetos referidos anteriormente, é mais comum efetuarem-se análises de amostras perturbadas do solo, para calcular a permeabilidade, compressibilidade, densidade e capacidade de suporte do solo.

O ensaio designado por “Standard Penetration Test” (SPT) é o mais largamente divulgado uma vez que, em comparação com outros tipos de ensaios de penetração, a sua rapidez e simplicidade de execução, o seu baixo custo e o facto de ser utilizado desde há cerca de cem anos, lhe conferem vantagens significativas, existindo uma vasta experiência acumulada na sua aplicação. Refira-se ainda que foi a partir deste ensaio que se obteve a informação sobre o solo nos casos de estudo analisados mais à frente, pelo que apenas este ensaio será abordado no âmbito desta dissertação.

O Standard Penetration Test (SPT) é um ensaio realizado *in situ* que consiste em projetar um amostrador, ilustrado na figura 3.2, a uma distância de 470mm até ao solo no fundo de um furo e contar o número de pancadas necessárias para que o amostrador percorra as duas últimas distâncias de 150mm num total de 300mm, obtendo-se assim um número N . O amostrador tem um peso de 63,5 kg e é deixado cair livremente de uma altura de 760mm. A haste de perfuração está referenciada com três marcas distanciadas entre si de 150mm e a guia da haste está marcada aos 760mm. O amostrador

é introduzido 150mm para que esteja assente em solo imperturbado (caso o amostrador se afunde no solo não pode ser recolhida qualquer informação sobre o número de pancadas, N). A soma de pancadas para os dois seguintes incrementos de 150mm é registada, N . Caso o último incremento de 150mm não se consiga completar, N é o número de pancadas dos dois primeiros incrementos de 150mm. O teste é recusado caso sejam necessárias 50 pancadas para atingir qualquer incremento de 150mm, sejam necessárias 100 pancadas para atingir 300mm ou se 10 pancadas consecutivas não produzirem avanço na penetração do amostrador. Caso o teste não atinja a profundidade pretendida, é adotado um de dois rácios, 50 ou 70 pancadas, para atingir uma penetração de 100mm.

Na Figura 3.2 são apresentados esquematicamente os tipos de amostradores normalmente utilizados neste ensaio.

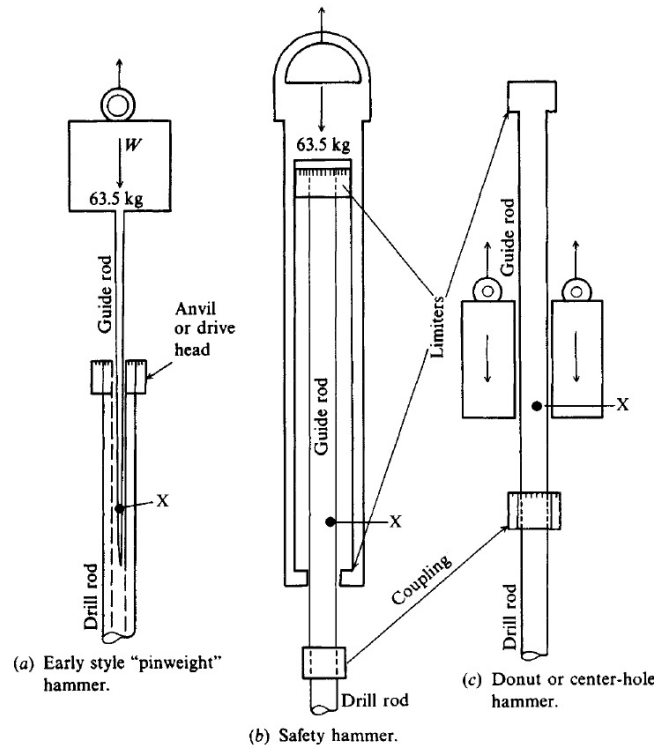


Figura 3.2: Equipamentos utilizados nos ensaios SPT [1]

3.4 Módulo de Reação do Solo

O módulo de reação do solo, k_s , é um parâmetro que relaciona a pressão no solo com a sua deformação, sendo largamente utilizado na análise estrutural de fundações. É expresso pela seguinte equação [1]:

$$k_s = \frac{q}{\delta} \quad (3.1)$$

- δ - Deformação (assentamento) do solo;

- q - Tensão transmitida ao solo.

O valor de k_s pode ser obtido através de um ensaio utilizando uma placa de carga sobre o solo em análise. O teste é realizado utilizando um conjunto de placas posicionadas concentricamente, das maiores para as menores, de forma a tornar a placa de ensaio o mais indeformável possível. O solo é então carregado e é registado o valor δ de deformação. Contudo, mesmo utilizando placas de dimensões relativamente reduzidas, é difícil estimar δ , uma vez que a rigidez da placa tende sempre a reduzir-se do centro para o exterior, o que se traduz sempre em algum grau de deformabilidade mais patente nas extremidades da placa.

É representado esquematicamente na Figura 3.3 um ensaio de carga com placa.

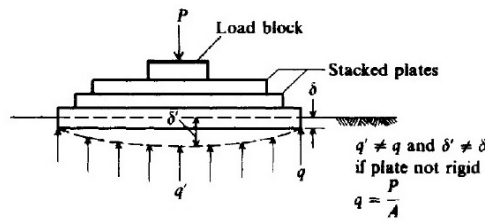


Figura 3.3: Ensaio de carga com placa de teste [1]

Apesar do módulo de reação depender da relação tensão-deslocamento do solo (ver Figura 3.4), em geral adota-se um procedimento simplificado. Assim a tensão q obtém-se dividindo a carga P pela área de contacto, sendo δ dado pela média das diferentes deformações registadas.

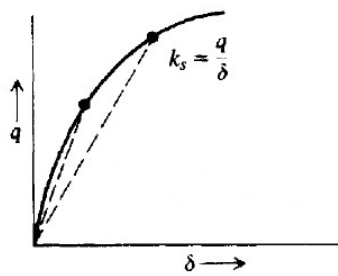


Figura 3.4: Relação Tensão-Deslocamento e correspondente cálculo de k_s [1]

Uma aproximação mais refinada do verdadeiro valor de k_s pode ser obtida caso se seccione a curva $q - \delta$ em patamares segundo as zonas da placa; no entanto, esta abordagem é bastante mais complexa, pelo que raramente é adotada.

Alguns autores não subscrevem a utilização do conceito de módulo de reação do solo e preferem, em alternativa, utilizar os parâmetros elásticos, módulo de elasticidade, E_s , e coeficiente de Poisson,

μ , do solo. Contudo, como se encontra citado em [1], 'Em formulações de Elementos Finitos, a menos que o módulo de elasticidade do solo possa ser estimado com precisão, é preferível adotar o conceito de módulo de reação, devido à sua facilidade de utilização e à poupança de computação'.

Existe uma relação entre k_s e E_s , demonstrada em [4] e [5], dada pela seguinte equação:

$$Bk_s = 0.65 \sqrt[12]{\frac{E_s B^4}{E_f I_f}} \frac{E_s}{1 - \mu^2} \quad (3.2)$$

- k_s - módulo de reação do solo;
- E_s - módulo de elasticidade do solo;
- E_f - módulo de elasticidade do material da fundação;
- B - largura da fundação;
- I_f - momento principal de inércia da seção em relação ao eixo de flexão;
- μ - coeficiente de Poisson do solo;

É possível demonstrar que a equação (3.2) pode ser simplificada [1], resultando em

$$k_s = \frac{E_s}{B(1 - \mu^2)} \quad (3.3)$$

Dado o módulo de reação do solo variar em profundidade, é habitual exprimir essa variação através da expressão (3.4) [1]:

$$k_s = A_s + B_s Z^n \quad (3.4)$$

- A_s - constante (valor de k_s para $z = 0$);
- B_s - coeficiente que depende da variação de k_s em função da profundidade;
- Z - profundidade pretendida;
- n - expoente determinado em função do tipo de solo.

Para fundações pouco profundas, $A_s > 0$ e $B_s \simeq 0$; para fundações profundas B_s é expresso pela equação (3.5)

$$B_s = \frac{B}{L^n} \quad (3.5)$$

- L - comprimento enterrado da estaca (m).

Deste modo, a expressão de k_s é:

$$k_s = A_s + B \left(\frac{Z}{L} \right)^n \quad (3.6)$$

Em [2] é sugerido que o valor de n para areias seja unitário e para argilas situa-se entre 0.4 e 0.8.

Quando submetido a uma carga axial, o pilar-estaca move-se lateralmente gerando uma considerável resistência ao esforço de corte, devido a compressão na face "oposta" ao deslocamento e a forças de corte nos lados do pilar, como ilustrado na Figura 3.5.

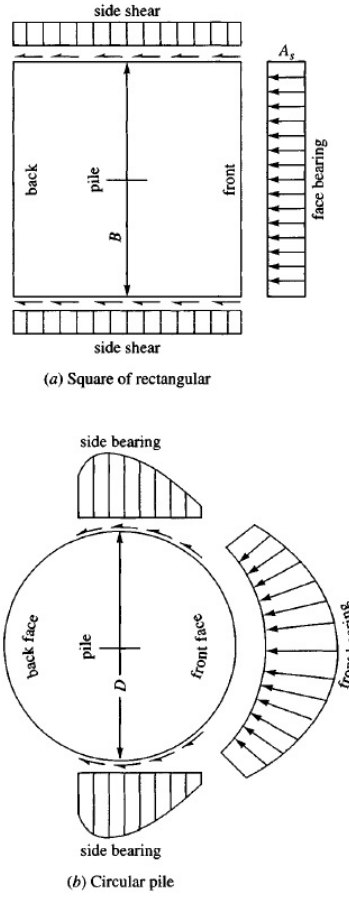


Figura 3.5: Esforços nas Faces da Estaca [1]

Devido a este fenómeno, em [6] é sugerido que, para solos argilosos, k_s é dado por:

- Para pilares quadrados e com perfil H

$$k_s = F_w \times \frac{0.48 \times E_s}{B} \quad (3.7)$$

- Para pilares circulares

$$k_s = F_w \times \frac{0.9 \times E_s}{B} \quad (3.8)$$

Para solos arenosos, tem-se:

$$k_s = F_w \times \frac{E_s}{B} \quad (3.9)$$

F_w depende da forma e da dimensão do pilar, sendo obtido pela tabela 3.1 [1]:

| Tabela 3.1: Valores de F_w | |
|------------------------------|---------------|
| Pilar | F_w |
| Circular | 1.30 até 1.70 |
| Quadrado e H | 1.0 |

Segundo [7], é possível transformar os valores SPT do solo em valores equivalentes do módulo de elasticidade, $E_s(kPa)$, através de:

$$E_s = 650NkPa \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.7), (3.8) e (3.9) resultam as expressões (3.11), (3.12) e (3.13) utilizadas na determinação dos valores de módulo de reação do solo dos casos de estudo apresentados mais à frente, considerando que os pilares dos casos de estudo são circulares.

Para solos argilosos:

- Para pilares quadrados e com perfil H

$$k_s = \frac{0.48 \times 650 \times N}{B} \quad (3.11)$$

- Para pilares circulares

$$k_s = 1.7 \times \frac{0.90 \times 650 \times N}{B} \quad (3.12)$$

Para solos arenosos, tem-se:

$$k_s = 1.7 \times \frac{650 \times N}{B} \quad (3.13)$$

3.5 Formulação do Método dos Elementos Finitos

Atendendo a que o problema nesta dissertação é resolvido através do método dos Elementos Finitos, procede-se à explicação dos fundamentos em que esta formulação assenta com base num exemplo de uma viga em fundação elástica.

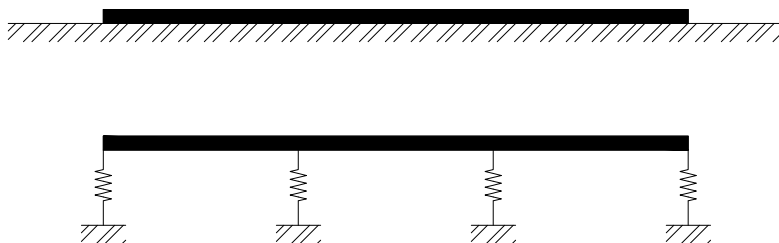


Figura 3.6: Viga em Meio Elástico

Considerando a Figura 3.6, em qualquer nó i da estrutura, isto é, em qualquer ponto de junção de dois ou mais membros da estrutura, a equação

$$P_i = A_i F_i \quad (3.14)$$

permite relacionar qualquer força externa atuando no nó i com as forças internas, utilizando uma constante de proporcionalidade A . Note-se que tanto P como F se referem tanto a forças como a momentos e que a notação $A_i F_i$ é uma abreviatura para o somatório que equilibra a força nodal atuante no nó i .

Considerando o conjunto de nós que compõem qualquer estrutura e utilizando notação matricial, em que P e F são vetores coluna e A é uma matriz retangular, a equação (3.14) pode representar-se do seguinte modo:

$$P = AF \quad (3.15)$$

A equação seguinte, tendo em conta o mesmo conjunto de nós anteriormente referido, permite relacionar a deformação em qualquer nó com o deslocamento nodal correspondente,

$$e = BX \quad (3.16)$$

em que e e X tanto podem ser deslocamentos como rotações. Do teorema recíproco da mecânica de estruturas [8], é possível demonstrar (ver Figuras 3.16 e 3.17) que a matriz B equivale à transposta da matriz A (ver secção 3.5.2), ou seja:

$$e = A^t X \quad (3.17)$$

As forças internas F estão relacionadas com as deformações internas através da matriz de rigidez S , da seguinte forma

$$F = S e \quad (3.18)$$

Substituindo (3.17) em (3.18) vem:

$$F = S A^t X \quad (3.19)$$

E, substituindo a equação (3.19) em (3.15), vem:

$$P = A S A^t X \quad (3.20)$$

Invertendo a matriz quadrada $A S A^t$, a equação (3.20) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$X = [A S A^t]^{-1} P \quad (3.21)$$

A partir desta equação é possível determinar os esforços ou tensões internas substituindo (3.21) em (3.19). A matriz $A S A^t$ é geralmente designada por matriz de rigidez global, uma vez que traduz o sistema de equações de equilíbrio, considerando as forças nodais P e os deslocamentos nodais X . É conveniente elaborar a matriz global considerando um elemento finito de cada vez e utilizar o princípio da sobreposição para efectuar a assemblagem da matriz completa.

3.5.1 Determinação da Matriz A

Seguidamente, ilustra-se a construção da matriz A, considerando a Figura 3.7.

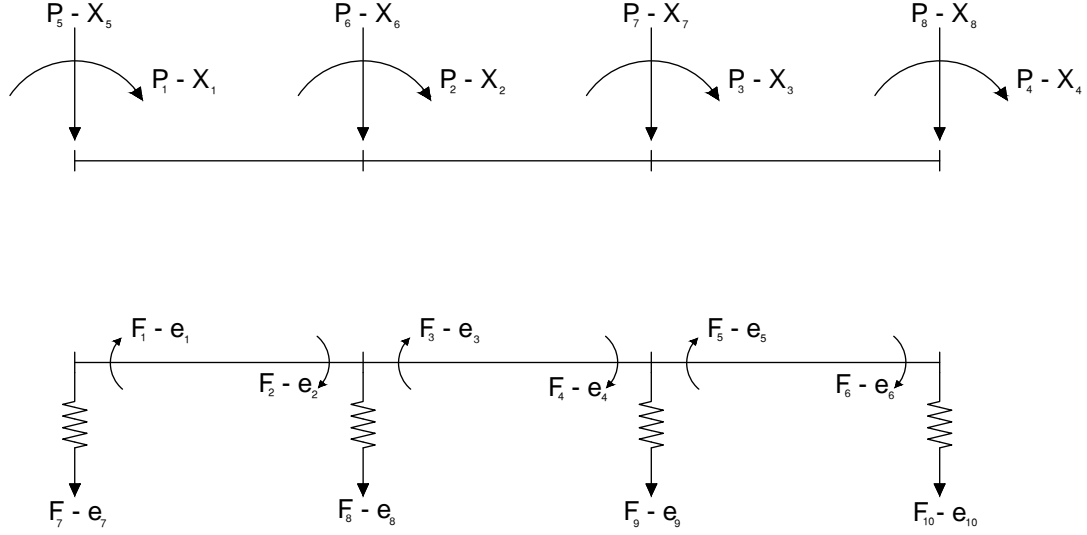


Figura 3.7: Viga Discretizada

Na Figura 3.7 a viga foi discretizada considerando 3 elementos finitos em que foram codificados os momentos atuantes externos nos nós de P_1 até P_4 com as correspondentes rotações X_1 até X_4 e as forças externas na direção vertical de P_5 até P_8 com os respectivos deslocamentos de X_5 até X_8 . A figura 3.7 ilustra a codificação $P - X$ adotada. A numeração de P_i assume esta configuração pois é conveniente para a construção da matriz de rigidez S como sugerido em [1].

Atentando à discretização da viga representada na Figura 3.7, foram aplicadas forças internas nas extremidades dos diversos membros da estrutura, perfazendo um total de 3 elementos e 4 nós. De F_1 a F_6 , estão codificados os momentos internos dos elementos respectivos a que correspondem as deformações internas de e_1 até e_6 . De F_7 a F_{10} correspondem as forças internas das molas de Winkler ou apoios elásticos e os respectivos valores de deformação do solo, e_7 a e_{10} .

Considerando a Figura 3.8, podem escrever-se as equações de equilíbrio de cada elemento, resolvendo-as sempre em ordem a P_i .

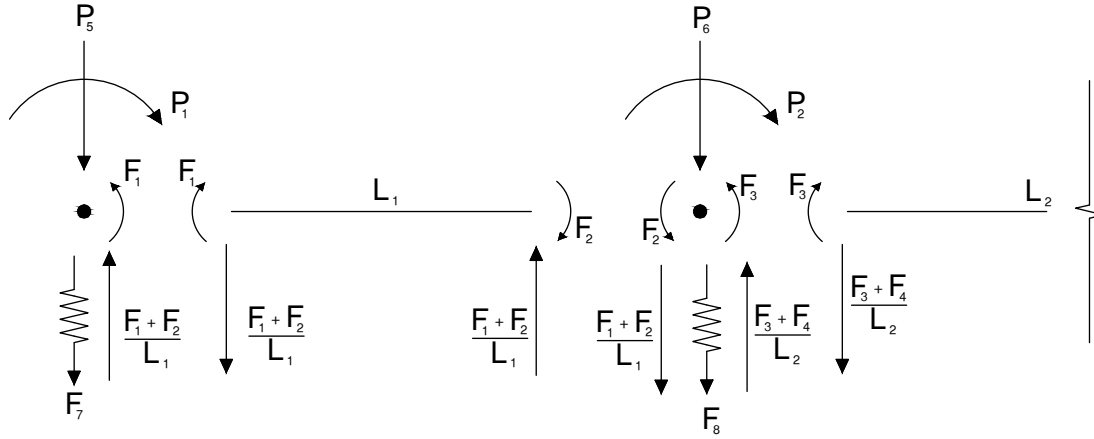


Figura 3.8: Equilíbrio nos Nós

Tendo em conta a equação (3.15) e considerando o primeiro nó, obtém-se, por equilíbrio de momentos:

$$P_1 - F_1 = 0 \Leftrightarrow P_1 = F_1 \quad (3.22)$$

Por equilíbrio de forças verticais, tem-se:

$$P_5 - \frac{F_1}{L_1} - \frac{F_2}{L_1} + F_7 = 0 \Leftrightarrow P_5 = \frac{F_1}{L_1} + \frac{F_2}{L_1} - F_7 \quad (3.23)$$

Procede-se de modo análogo para todos os nós até as equações de equilíbrio para todos os nós da estrutura estarem definidas.

Sendo NN o número de nós, NE é o número de elementos e NM o número de molas de Winkler, e considerando que o caso apresentado esquematicamente na figura 3.7 existem 4 nós e 3 elementos e que em cada nó existe uma mola de Winkler, a matriz A tem dimensões 8×10 , sendo $NN \times 2 = 8$ e $NE \times 2 + NM = 10$.

A matriz A assume assim a seguinte configuração:

$A =$

| P \ F | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|----|----|----|----|
| 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | 1 | 1 | | | | | | | |
| 3 | | | | 1 | 1 | | | | | |
| 4 | | | | | | 1 | | | | |
| 5 | $\frac{1}{L_1}$ | $\frac{1}{L_1}$ | | | | | -1 | | | |
| 6 | $\frac{-1}{L_1}$ | $\frac{-1}{L_1}$ | $\frac{1}{L_2}$ | $\frac{1}{L_2}$ | | | | -1 | | |
| 7 | | | $\frac{-1}{L_2}$ | $\frac{-1}{L_2}$ | $\frac{1}{L_3}$ | $\frac{1}{L_3}$ | | | -1 | |
| 8 | | | | | $\frac{-1}{L_3}$ | $\frac{-1}{L_3}$ | | | | -1 |

Figura 3.9: Composição da Matriz A

A configuração da matriz A é alterada quando outras condições de fronteira são aplicadas ao problema. Tendo em atenção os casos de estudo apresentados no capítulo seguinte, é ilustrada a configuração que a matriz A assume para um caso em que existem dois lintéis (Figuras 3.10 e 3.12) e em seguida para um caso em que os deslocamentos no topo do pilar estão restringidos (Figuras 3.13 e 3.15).

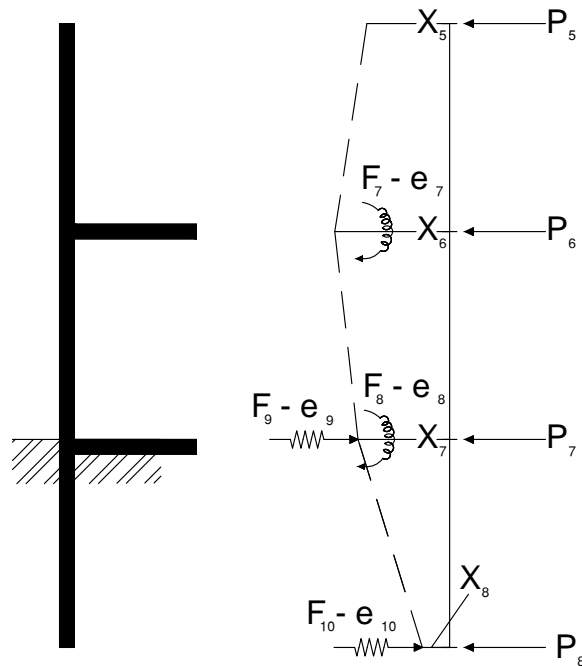


Figura 3.10: Pilar-Estaca com Dois Lintéis

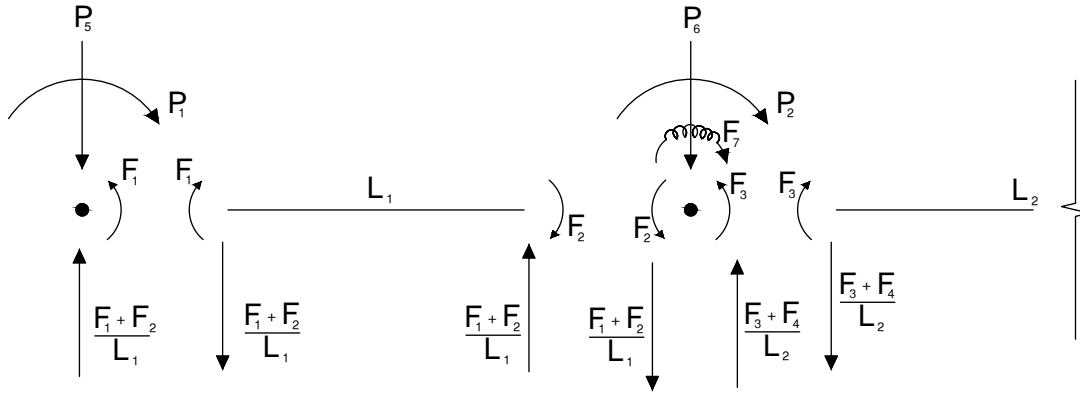


Figura 3.11: Equilíbrio nos Nós (Pilar-Estaca com Dois Lintéis)

A =

| P \ F | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----|----|----|----|
| 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | 1 | 1 | | | | -1 | | | |
| 3 | | | | 1 | 1 | | | -1 | | |
| 4 | | | | | | 1 | | | | |
| 5 | $\frac{1}{L_1}$ | $\frac{1}{L_1}$ | | | | | | | | |
| 6 | $\frac{1}{L_1}$ | $\frac{1}{L_1}$ | $\frac{1}{L_2}$ | $\frac{1}{L_2}$ | | | | | | |
| 7 | | | $\frac{1}{L_2}$ | $\frac{1}{L_2}$ | $\frac{1}{L_3}$ | $\frac{1}{L_3}$ | | | -1 | |
| 8 | | | | | $\frac{1}{L_3}$ | $\frac{1}{L_3}$ | | | | -1 |

Figura 3.12: Composição da Matriz A (Pilar-Estaca com Dois Lintéis)

Note-se que, o caso em que os deslocamentos são restringidos no topo, é admitido um pequeno erro, pois o somatório de forças de corte no primeiro nó é diferente de zero. Este erro é admitido em [2] e pode ser minimizado diminuindo o comprimento dos elementos adjacentes ao nó onde esta condição se verifica. Para o caso em que as rotações estejam restringidas, a mesma hipótese é admitida; no

entanto, nesta situação, é o somatório de momentos que não verifica a condição de equilíbrio no nó considerado.

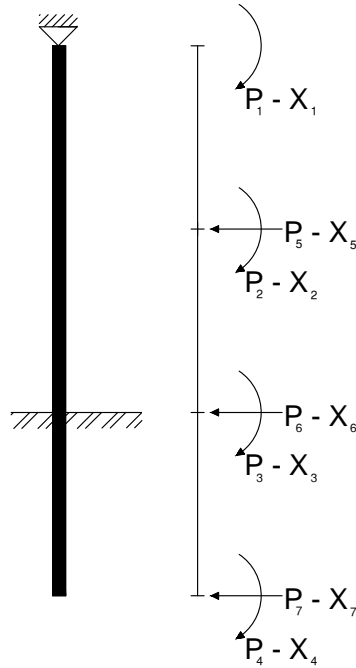


Figura 3.13: Pilar-Estaca com Deslocamento Restringido no Topo

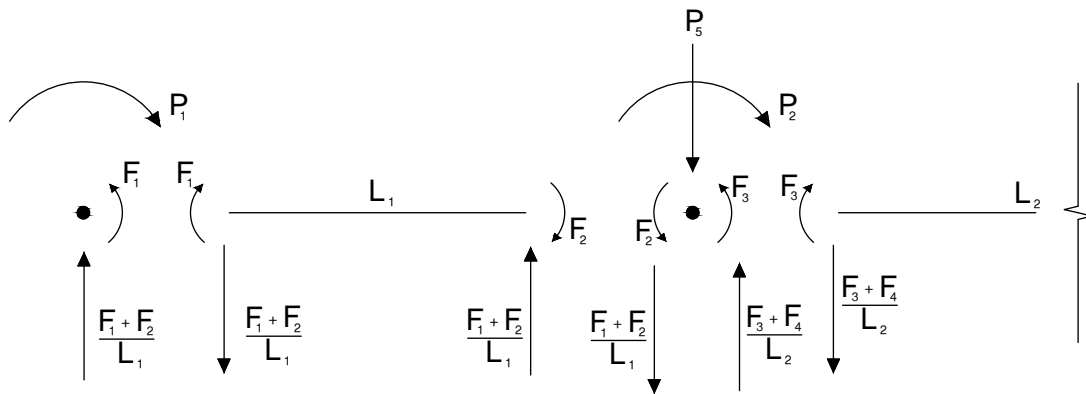


Figura 3.14: Equilíbrio nos Nós (Pilar-Estaca com Deslocamento Lateral Restringido no Topo)

$A =$

| $\begin{smallmatrix} \text{P} \\ \text{F} \end{smallmatrix}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|----|----|
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | | 1 | 1 | | | | | |
| 3 | | | | 1 | 1 | | | |
| 4 | | | | | | 1 | | |
| 5 | $-\frac{1}{L_1}$ | $-\frac{1}{L_1}$ | $\frac{1}{L_2}$ | $\frac{1}{L_2}$ | | | | |
| 6 | | | $-\frac{1}{L_2}$ | $-\frac{1}{L_2}$ | $\frac{1}{L_3}$ | $\frac{1}{L_3}$ | -1 | |
| 7 | | | | | $-\frac{1}{L_3}$ | $-\frac{1}{L_3}$ | | -1 |

Figura 3.15: Matriz A com Deslocamento Lateral Restringido no Topo

3.5.2 Determinação da Matriz B

Procede-se seguidamente à determinação da matriz B. Na Figura 3.16, é ilustrado o primeiro elemento da viga discretizada na Figura 3.7, assumindo a hipótese dos pequenos deslocamentos, as deformações internas têm de ser equivalentes aos deslocamentos e rotações externas.

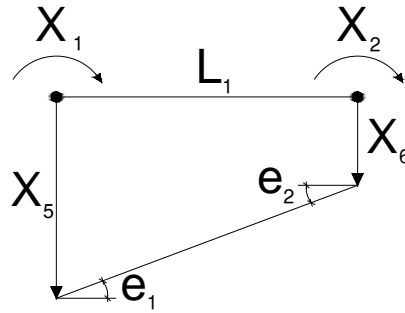


Figura 3.16: Deslocamentos, Rotações e Deformações do Primeiro Elemento da Viga da Figura 3.7

Assumindo que o nó 1 tem uma rotação X de 1 radiano e dado que a mola de Winkler correspondente não resiste à rotação, a deformação e_1 devida a essa rotação é igual a:

$$(e_1 - X_1) \times L_1 = X_5 - X_6 \Leftrightarrow e_1 = X_1 + \frac{X_5}{L_1} - \frac{X_6}{L_1} \quad (3.24)$$

3.5. Formulação do Método dos Elementos Finitos

Extrapolando a equação acima para todos os nós de rotação de e_2 até e_6 , todas as equações de “deformação” estão definidas.

Considerem-se agora as deformações internas das molas, de e_7 até e_{10} . Para o primeiro nó tem-se:

$$e_7 = -X_5 \quad (3.25)$$

Procedendo-se de forma análoga para os restantes nós, obtém-se a matriz B indicada na Figura 3.17:

B =

| e \ X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------|---|---|---|---|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| 1 | 1 | | | | $\frac{1}{L_1}$ | $-\frac{1}{L_1}$ | | |
| 2 | | 1 | | | $\frac{1}{L_1}$ | $-\frac{1}{L_1}$ | | |
| 3 | | | 1 | | | $\frac{1}{L_2}$ | $-\frac{1}{L_2}$ | |
| 4 | | | | 1 | | $\frac{1}{L_2}$ | $-\frac{1}{L_2}$ | |
| 5 | | | | | 1 | | $\frac{1}{L_3}$ | $-\frac{1}{L_3}$ |
| 6 | | | | | | 1 | $\frac{1}{L_3}$ | $-\frac{1}{L_3}$ |
| 7 | | | | | -1 | | | |
| 8 | | | | | | -1 | | |
| 9 | | | | | | | -1 | |
| 10 | | | | | | | | -1 |

Figura 3.17: Composição da Matriz B

É possível demonstrar que a matriz B é igual à transposta da matriz A, ou seja, $B = A^t$.

3.5.3 Matriz de Rigidez S

A matriz de rigidez S tem dimensões $F \times e$. Assim, uma vez que existe o mesmo número de deformações internas e de forças internas, S é uma matriz quadrada.

Atendendo à Figura 3.18, é possível, através do cálculo das forças de fixação de elementos de barra, estabelecer as equações (3.26) e (3.27) para o primeiro elemento, sendo L o comprimento do elemento:

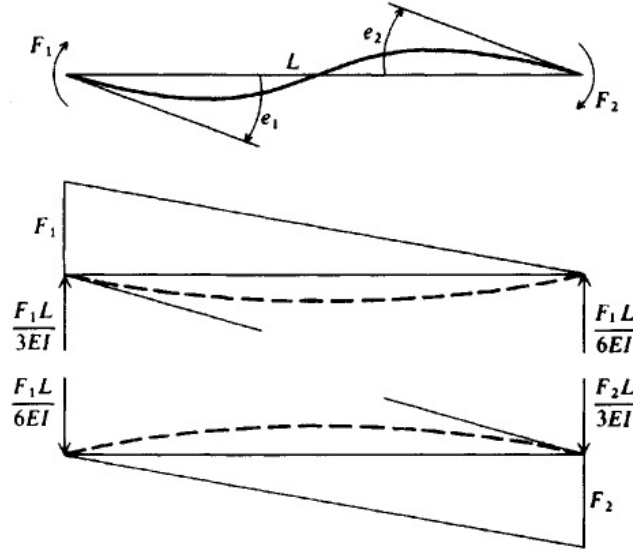


Figura 3.18: Forças de Fixação num Elemento de Viga [1]

$$\frac{F_1 L}{3EI} - \frac{F_2}{6EI} = e_1 \Leftrightarrow F_1 = \frac{4EI}{L} e_1 + \frac{2EI}{L} e_2 \quad (3.26)$$

$$-\frac{F_1 L}{6EI} + \frac{F_2}{3EI} = e_2 \Leftrightarrow F_2 = \frac{2EI}{L} e_1 + \frac{4EI}{L} e_2 \quad (3.27)$$

Para os restantes elementos procede-se de modo análogo. Posteriormente, são introduzidas na matriz de rigidez as molas correspondentes às reações do solo. A matriz de rigidez S toma assim a configuração indicada na Figura 3.19.

$S =$

| $F \backslash e$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|----|----|----|----|
| 1 | $\frac{4EI}{L_1}$ | $\frac{2EI}{L_1}$ | | | | | | | | |
| 2 | $\frac{2EI}{L_1}$ | $\frac{4EI}{L_1}$ | | | | | | | | |
| 3 | | | $\frac{4EI}{L_2}$ | $\frac{2EI}{L_2}$ | | | | | | |
| 4 | | | $\frac{2EI}{L_2}$ | $\frac{4EI}{L_2}$ | | | | | | |
| 5 | | | | | $\frac{4EI}{L_3}$ | $\frac{2EI}{L_3}$ | | | | |
| 6 | | | | | $\frac{2EI}{L_3}$ | $\frac{4EI}{L_3}$ | | | | |
| 7 | | | | | | | K1 | | | |
| 8 | | | | | | | | K2 | | |
| 9 | | | | | | | | | K3 | |
| 10 | | | | | | | | | | K4 |

Figura 3.19: Matriz de Rigidez (S)

3.5.4 Rigidez das Molas de Winkler

As molas de Winkler são adicionadas à matriz de rigidez do sistema, como anteriormente referido. Para o cálculo das rigidezes correspondentes, utilizam-se as equações (3.28) e (3.29) sugeridas em [1]:

$$K_i = \frac{(B_i)(L_i)}{6}(2k_{s,i} + k_{s,i+1}) \quad (3.28)$$

$$K_i = \frac{(B_i)(L_{i-1})}{6}(2k_{s,i} + k_{s,i-1}) \quad (3.29)$$

- B_i - Largura da coluna no elemento i ;
- L_i - Comprimento do elemento i .

Considerando o primeiro nó que se encontra enterrado no solo, a rigidez da mola correspondente é calculada pela equação (3.28). A rigidez da mola presente no nó mais profundo é dada pela equação (3.29). Para as molas intermédias, ou seja, K_i com $i = 2, \dots, n-1$, o seu valor é calculado pelo somatório das equações (3.28) e (3.29) visto que para as molas de Winkler intermédias, ou seja, as molas de solo posicionadas nos nós entre o primeiro e o último têm solo tanto acima como abaixo, pelo que a expressão da rigidez obtém-se pela equação (3.30). A Figura 3.20 esquematiza esse procedimento.

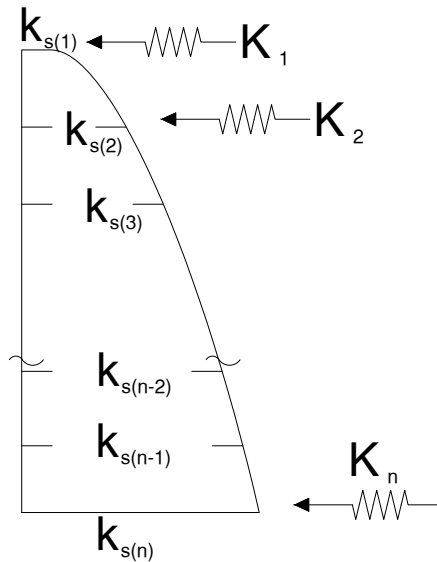


Figura 3.20: Molas de Winkler (Zona Enterrada do Pilar)

$$K_i = \frac{(B_i)(L_i)}{6}(2k_{s,i} + k_{s,i+1}) + \frac{(B_i)(L_{i-1})}{6}(2k_{s,i} + k_{s,i-1}), i = 2, \dots, n \quad (3.30)$$

3.6 Encurvadura de Colunas Total ou Parcialmente Enterradas

Nesta secção, apresenta-se um método proposto por [8] para determinação da carga de encurvadura de pilares total ou parcialmente enterrados, através de um procedimento que, utilizando a formulação apresentada na secção anterior, permite obter a sua carga crítica de encurvadura, o seu comprimento de encurvadura e a deformada de elementos comprimidos.

A título exemplificativo, considere-se a coluna esquematizada na Figura 3.21, com 3 elementos e 4 nós em que o solo apenas envolve a coluna a partir do nó 3, identificado com a codificação $P_3 - X_3$.

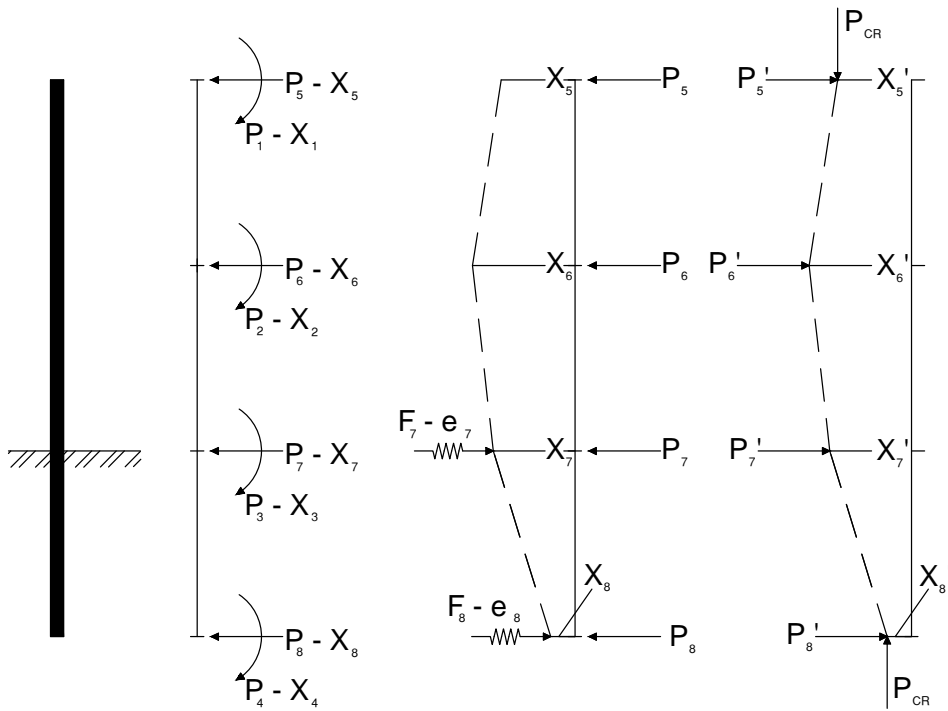


Figura 3.21: Exemplo de coluna parcialmente apoiada em meio elástico (solo)

A coluna analisada tem condições de fronteira equivalentes para todos os nós, sendo permitidas rotações e translações em qualquer nó da coluna. Primeiramente, é necessário determinar a matriz de rigidez global de forma análoga à referida no sub-capítulo precedente, ou seja, obter a matriz ASA^t do problema em estudo e invertê-la. A matriz resultante da inversão, vem seccionada por “zonas”, identificadas na Figura 3.22 sendo que a matriz D corresponde à matriz A_3 .

$$[ASA^T]^{-1} =$$

| X \ P | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------|---|---|-------|---|---|---|---------|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | A_1 | | | | A_2 | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | A_2 | | | | $D=A_3$ | |
| 8 | | | | | | | | |

Figura 3.22: Disposição da Matriz D

Através da equação (3.31) é possível determinar a matriz D , sendo X_s e P_s , respetivamente, os deslocamentos laterais e as forças horizontais atuantes nos nós da coluna.

$$X_s = DP_s \quad (3.31)$$

Em seguida, determina-se uma matriz de segunda ordem, designada por G , considerando cada nó isoladamente.

$$P'_s = GX'_s P_{cr} \quad (3.32)$$

A matriz G é obtida efetuando o equilíbrio de momentos em cada nó dos elementos considerados individualmente para cada deslocamento lateral X' , como é ilustrado na Figura 3.23. P'_s são os esforços horizontais que se desenvolvem quando a coluna está próxima de atingir a instabilização pela carga crítica e, no limite, de forma a que o sistema esteja em equilíbrio, $P'_s = P_s$. Os termos de m_i , com $i = 1, \dots, n$ multiplicados por P_{cr} são os valores que, em cada elemento, transmitem a carga axial por atrito para o solo. A matriz G é uma matriz quadrada de dimensões coincidentes com o número de pontos discretizados para o pilar-estaca em estudo.

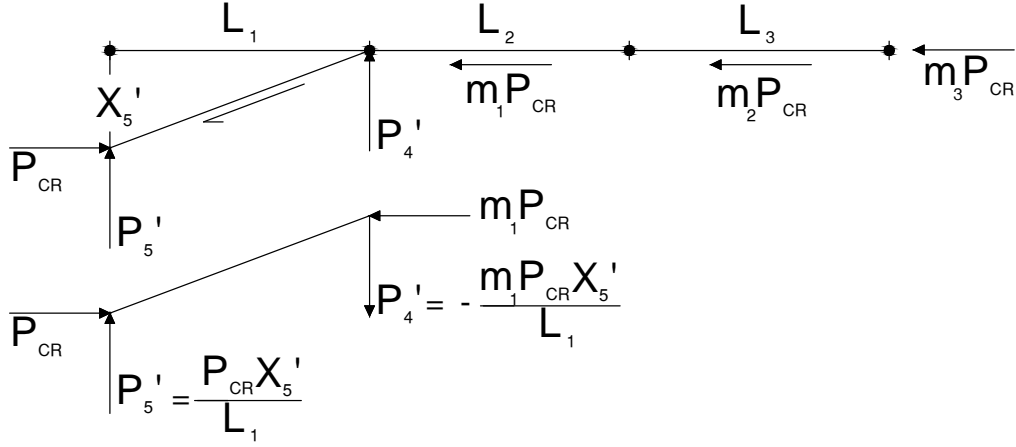


Figura 3.23: Elaboração da Matriz G

$$G = \begin{array}{c|cccc} & \begin{array}{c} P's \\ X's \end{array} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \begin{array}{c} \frac{1}{L_1} \\ -\frac{1}{L_1} \\ \frac{m_1 + m_2}{L_1 + L_2} \\ \frac{m_2 + m_3}{L_2 + L_3} \end{array} & \begin{array}{c} -\frac{m_1}{L_1} \\ \frac{m_1}{L_1 + L_2} \\ \frac{m_2}{L_2 + L_3} \\ -\frac{m_2}{L_3} \end{array} & \begin{array}{c} \\ -\frac{m_2}{L_2} \\ \frac{m_2 + m_3}{L_2 + L_3} \\ \frac{m_3}{L_3} \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{m_3}{L_3} \\ \frac{m_3}{L_3} \end{array} \end{array}$$

Figura 3.24: Composição da Matriz de Segunda Ordem G (de Rigidez Geométrica)

Uma vez que os valores de P'_s e de P_s têm de ser equivalentes de forma a que o sistema esteja em equilíbrio, substituindo (3.32) em (3.31) obtém-se

$$X_s = P_{cr} D G X'_s \quad (3.33)$$

A resolução da equação (3.33) resulta num problema de valores e vetores próprios, que pode ser resolvido aplicando um processo iterativo com um determinado factor de convergência ΔX proposto em [8].

3.6. Encurvadura de Colunas Total ou Parcialmente Enterradas

O algoritmo segundo o qual é efetuado o processo iterativo desenvolve-se mediante a aplicação dos seguintes passos:

1. Calcular e armazenar a matriz resultante da multiplicação de $D \times G$;
2. Como primeira aproximação, utilizar $X'_s(i)$ como uma matriz coluna com valores unitários;
3. Calcular o novo valor de X_s através de $X_s = D \times G \times X'_s$;
4. Normalizar os valores de X_s obtidos no passo anterior, dividindo todas as posições da matriz coluna X_s pelo maior valor encontrado em X_s ;
5. Comparar as diferenças em módulo entre deslocamentos obtidos em iterações sucessivas $|X_s - X'_s|$. Considera-se que a convergência só é atingida quando essa diferença for inferior a 10^{-9} para todas as entradas de X_s e X'_s . Repetir os passos 3 a 5 até se atingir convergência sendo que para ciclos efetuados após o primeiro, X'_s corresponde a X_s obtido na iteração anterior.
6. Por fim após, verificado o critério de convergência, a carga crítica é obtida dividindo o valor mais alto de X_s não normalizado pelo maior valor de X'_s não normalizado, ou seja, o maior valor de deslocamento do ciclo precedente dividido pelo maior valor de deslocamento do ciclo actual. Assim:

$$P_{cr} = \frac{X'_{s,max}}{X_{s,max}} \quad (3.34)$$

Para determinação da carga crítica de modos superiores ao primeiro, a matriz DG deve ser recalculada. Uma vez que este método não garante que a carga crítica mais baixa corresponda ao primeiro modo, devem ser considerados pelo menos os dois primeiros modos ao efectuar uma análise de estabilidade estrutural com este método [1].

A carga crítica de modos superiores ao primeiro é calculada seguindo os passos enumerados anteriormente utilizando a matriz DG modificada. Assim, sendo i o modo actual e $i + 1$ o modo seguinte, tem-se:

$$DG_{i+1} = DG_i - \frac{1}{(P_{cr} X_s^t G X_s)_i} (X_s \{G X_s\}^t)_i \quad (3.35)$$

A implementação computacional desta metodologia foi efetuada com recurso ao programa wxMaxima [12]. Em anexo apresenta-se listagem do programa desenvolvido com base nesta metodologia.

Na Figura 3.25, apresenta-se o fluxograma que esquematiza o procedimento acima descrito.

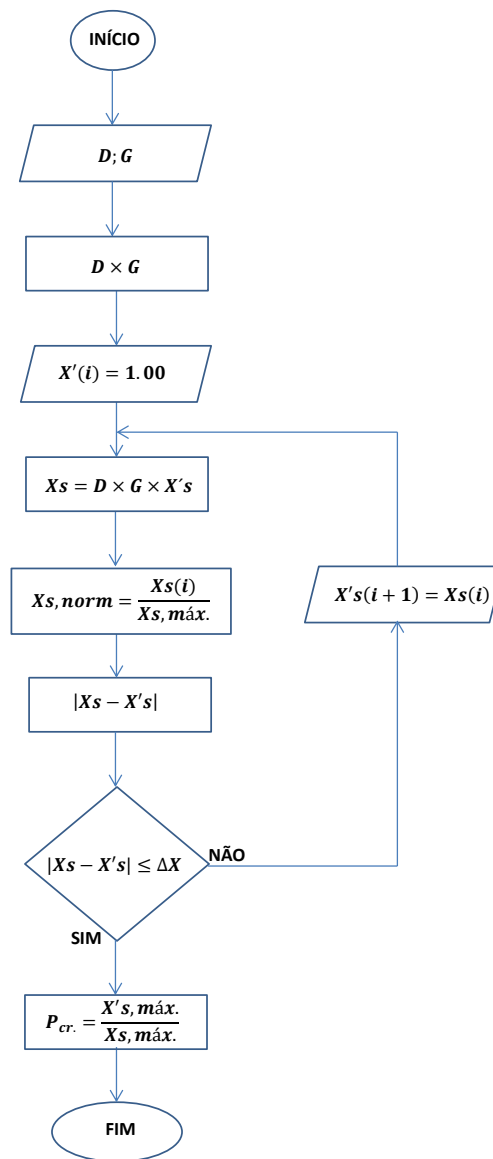


Figura 3.25: Fluxograma para Determinação de Cargas Críticas

3.7 Modelos Numéricos

3.7.1 Relação Constitutiva do Betão

No modelo de elementos finitos utilizado no programa de cálculo automático SAP2000, todas as colunas são constituídas por betão. Apesar do material que na realidade compõe as colunas ser o betão armado, foi assumido por falta de dados e por simplificação que a coluna é composta simplesmente por betão. Assim as propriedades do betão são classificadas como isotrópicas.

Todo e qualquer material isotrópico é caracterizado pelo fato de ter propriedades iguais em todas as direções, pelo que as suas características são simétricas em relação a todos os planos. Assim, qualquer plano definido por um referencial cartesiano é um plano de simetria em relação às características reológicas do material.

É admitida linearidade física do betão; logo, o seu comportamento é elástico linear o que corresponde a uma reta no diagrama tensão-deformação, sendo essa a relação constitutiva utilizada para o material dos elementos *Frame* em que se discretiza a estrutura.

De acordo com as propriedades isotrópicas e lineares do material, as relações tensão-deformação têm a seguinte forma [10]:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

- **E** - Módulo de Elasticidade;
- ν - Coeficiente de Poisson;
- **G** - Módulo de Distorção;

sendo o módulo de distorção calculado do seguinte modo:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.37)$$

3.7.2 Elementos Frame

Foram utilizados elementos de barra (elementos *Frame*) para modelar os diferentes casos de estudo, uma vez que são os mais indicados para a modelação de vigas, colunas ou treliças, tanto a 2 como a 3

dimensões. Neste caso, são apenas modeladas barras planas. Utilizando o módulo *SectionDesign* do programa, define-se um elemento (*Frame*) com o material betão indexado a esse mesmo elemento.

3.8 Verificação dos Modelos

De forma a validar os modelos considerados, efetuou-se uma verificação com a finalidade de assegurar que, tanto a formulação desenvolvida no programa wxMaxima, como o modelo numérico elaborado no programa de cálculo automático SAP2000, estão corretamente implementados.

Considere-se a Figura 3.26, onde se apresenta uma coluna carregada axialmente por uma carga P , apoiada nas extremidades por apoios elásticos de translação que simulam molas de solo ou Winkler, e por um apoio simples que impede os deslocamentos verticais. O material constituinte da coluna é o betão. Adotou-se $E = 30GPa$ como módulo de elasticidade do material, sendo a secção da coluna circular de 1.50m de diâmetro. A coluna tem um comprimento de $L = 10.0m$ e foi discretizada em 20 elementos finitos de 0.50m de comprimento.

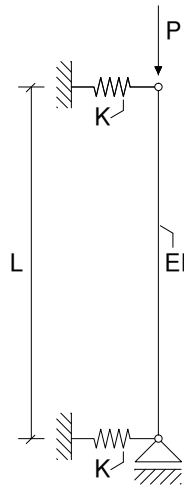


Figura 3.26: Coluna apoiada em molas de Winkler

No limite, considerando uma rigidez dos apoios elásticos infinita ou muito elevada, a coluna da Figura 3.26 pode ser representada como na Figura 3.27. Devido à elevada rigidez dos apoios elásticos, os deslocamentos encontram-se praticamente restringidos pelo que a mesma é equivalente a uma coluna simplesmente apoiada.

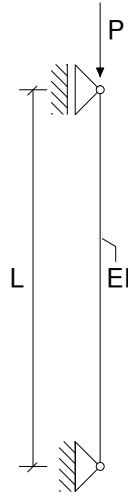


Figura 3.27: Coluna simplesmente apoiada

O sistema estrutural da Figura 3.27 tem uma solução teórica exata para a sua carga crítica de encurvadura, dada por $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$. Para a coluna em estudo, $P_{cr} = 735.8 MN$. Assim, aumentando sucessivamente a rigidez dos apoios elásticos da Figura 3.26, o valor da carga crítica dado pelos modelos adotados deverá tender para o valor teórico da coluna simplesmente apoiada, caso os modelos estejam corretamente aplicados.

Na Tabela 3.2, são apresentados os valores de P_{cr} para 5 casos em que a rigidez dos apoios elásticos é incrementada sucessivamente (incrementos de 25 MN/m). Note-se que a modelação realizada no programa SAP2000 contempla dois resultados: os resultados SAP1 consideram a deformabilidade da coluna fora do plano em estudo, enquanto que no SAP2 foi modelada a coluna como indeformável fora do plano. Estas análises diferenciadas foram adotadas uma vez que os casos de estudo considerados correspondem a casos reais de um viaduto [9]. Assim, a deformabilidade fora do plano é considerada nos casos de estudo (sendo feita uma análise do tipo SAP1).

Tabela 3.2: Cargas Críticas (Exercício de Verificação)

| Rigidez dos Apoios Elásticos (MN/m) | $P_{crwxMaxima}(MN)$ | $P_{crSAP1}(MN)$ | $P_{crSAP2}(MN)$ |
|-------------------------------------|----------------------|------------------|------------------|
| 75 | 375.2 | 375.0 | 375.0 |
| 100 | 500.25 | 500.0 | 500.0 |
| 125 | 623.6 | 625.0 | 625.0 |
| 150 | 737.4 | 713.8 | 735.8 |
| 175 | 737.4 | 713.8 | 735.8 |

Verifica-se que, para todas as análises, se atinge um valor de convergência de P_{cr} . As diferenças comparativamente ao valor teórico são apresentadas na Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Diferenças nos Resultados dos Modelos Elaborados

| | MEF (wxMaxima) | SAP1 | SAP2 |
|---------------|----------------|------|---------------|
| Diferença (%) | 0.22 | 3.07 | ≈ 0.0 |

Ao analisar os resultados obtidos (ver tabelas 3.2 e 3.3), verifica-se que as soluções SAP1 e SAP2 fornecem valores de P_{cr} , respetivamente, de $713.8MN$ e $735.8MN$. A diferença que SAP1 apresenta é explicada pela consideração de deformabilidade da coluna fora do plano, ou seja, é contemplada a deformação por corte fora do plano de análise, o que reduz a carga crítica de encurvadura [3]. Quanto à solução SAP2, converge exatamente para a solução teórica. Assim, considera-se que o modelo implementado no programa SAP2000 se encontra validado. Relativamente à modelação de Elementos Finitos desenvolvida no programa wxMaxima, obteve-se uma diferença de 0.22%, considerando-se esta como aceitável. Note-se que esta diferença é explicável pelo facto de, nesta formulação, uma parte da carga axial ter de ser obrigatoriamente transmitida para o solo por atrito. Este efeito foi contabilizado no último elemento finito na base da coluna, considerando que apenas 0,1% da carga axial é transmitida para o solo. Desta forma, foi este o fator de carga axial transmitida por atrito para o solo que se considerou nos casos de estudo. Nestas condições, considera-se que a formulação de Elementos Finitos implementada no programa wxMaxima está também verificada para aplicação nos casos de estudo.

Capítulo 4

Casos de Estudo

O conjunto de pilares-estaca considerados neste capítulo corresponde a uma situação real, tendo os dados correspondentes sido retirados do projeto do viaduto do Carregado [9]. Neste capítulo, são apresentados os esquemas da geometria dos pilares, informação geotécnica relevante e hipóteses simplificativas adotadas no cálculo dos pilares-estaca.

4.1 Geometria dos Pilares-Estaca, Discretização e Hipóteses Simplificativas

Foram considerados três alinhamentos do viaduto, alinhamentos esses escolhidos pela fraca capacidade de suporte do solo e pelo fato de terem sido efetuadas nas proximidades desses alinhamentos sondagens SPT que fornecem informação necessária e minimamente fiável para se proceder com suficiente confiança à estimativa da rigidez das molas correspondentes à reação do solo.

De acordo com a numeração definida no projeto do viaduto, os alinhamentos em questão são designados por SVA3, SVA4 e SVA16.

Na Figura 4.1, apresenta-se o esquema de um alinhamento transversal e da vista longitudinal desse mesmo alinhamento do viaduto. Todas as dimensões apresentadas na Figura 4.1 são comuns a todos os pilares estudados (SVA3, SVA4 e SVA16), representando pois a sua geometria em termos gerais.

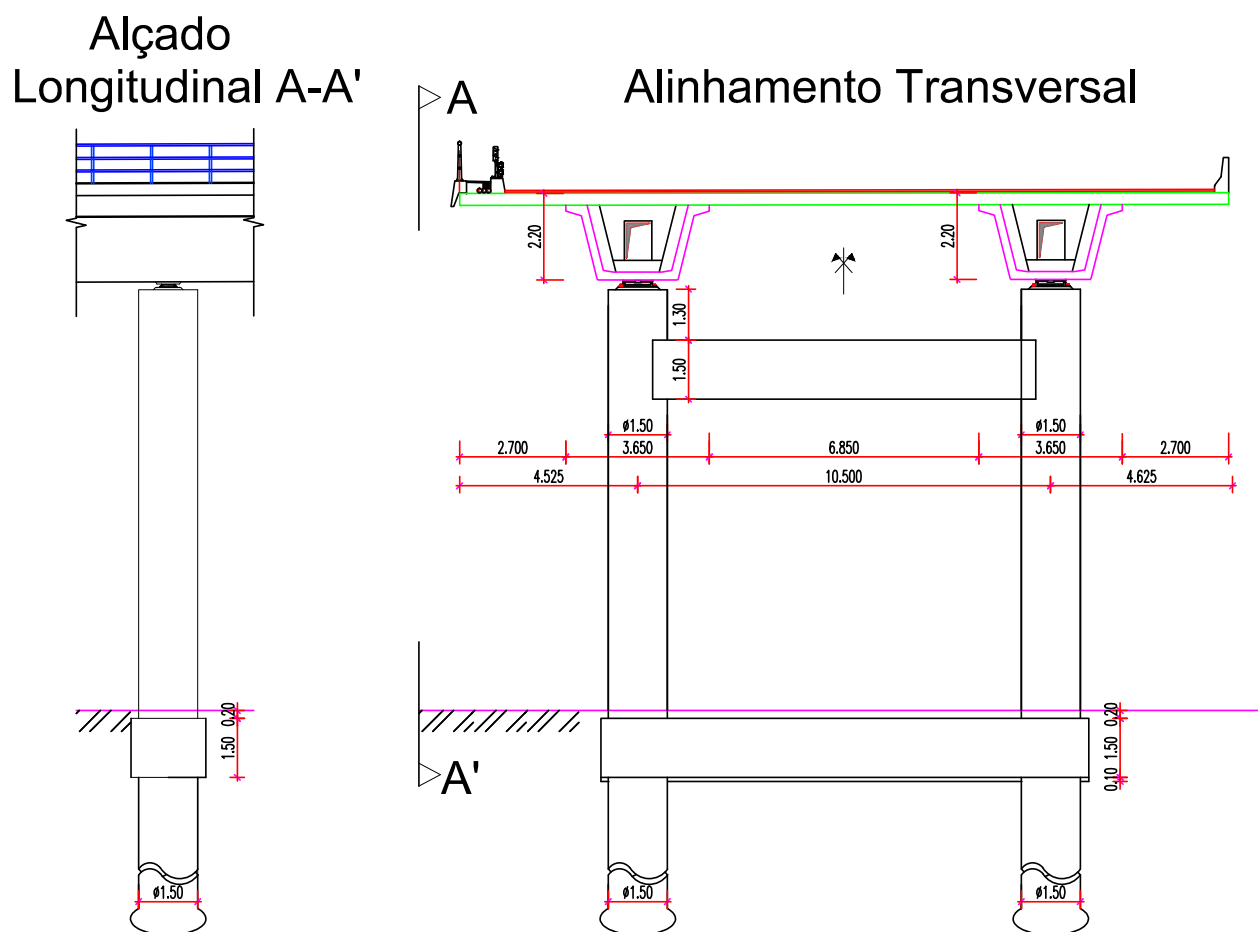


Figura 4.1: Vistas dos pilares do viaduto e sua geometria (m) [9]

Considerando o alinhamento transversal da Figura, verifica-se a existência de dois lintéis, designados por lintel de topo (LT) e lintel de fundo (LF), os quais estão esquematizados na Figura 4.2 e são comuns a todos os pilares (SVA3, SVA4 e SVA16).

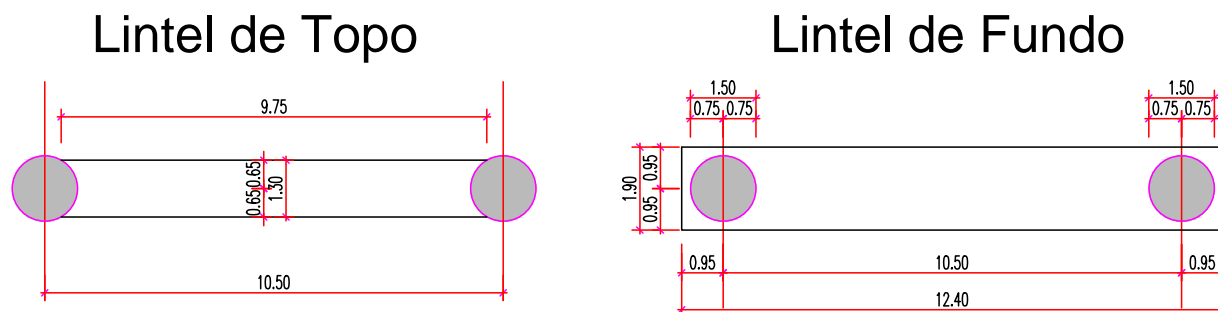


Figura 4.2: Geometria dos lintéis (m)

4.1. Geometria dos Pilares-Estaca, Discretização e Hipóteses Simplificativas

A Figura 4.3 apresenta a discretização geral adotada para todos os casos de estudo. A discretização pormenorizada respeitante a cada um dos pilares encontra-se nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, relativas respetivamente aos pilares SVA3, SVA4 e SVA16, e é comum tanto para a direção transversal como para a direção longitudinal.

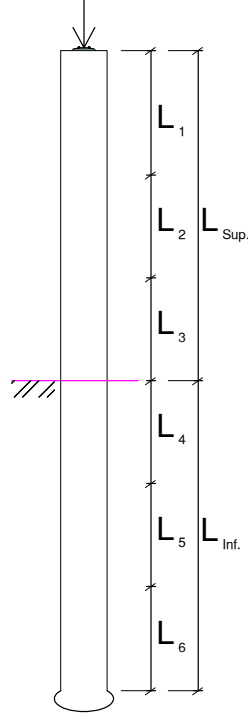


Figura 4.3: Discretização Geral dos Pilares

Tabela 4.1: Discretização Pilar SVA3

| L_i | Comprimento $L_i(m)$ | Nº de Elementos | $L_{elemento}(m)$ | Comprimento da Zona (m) |
|-------|----------------------|-----------------|-------------------|-------------------------|
| L_1 | 1.30 | 2 | 0.65 | $L_{Sup.} = 13.80$ |
| L_2 | 1.50 | 2 | 0.75 | |
| L_3 | 11.0 | 11 | 1.0 | |
| L_4 | 18.0 | 36 | 0.50 | $L_{Inf.} = 34.50$ |
| L_5 | 10.50 | 14 | 0.75 | |
| L_6 | 6.0 | 4 | 1.50 | |

As hipóteses simplificativas consideradas nos casos de estudo baseados no pilar SVA3 são as seguintes: $L_{Sup.} = 13.79m \approx 13.80m$ ($L_3 = 10.99m \approx 11.0m$); os ensaios SPT foram retirados em intervalos de $1.50m$, por esse motivo assume-se que, tendo $L_{Inf.} = 34.0m$ de comprimento ($L_6 = 4.0m$), $L_{Inf.} = 34.50m$ e $L_6 = 4.50m$ (apenas o último elemento na base de L_6 alterado, passando a ter $1,50m$ ao invés de $1,0m$).

Tabela 4.2: Discretização Pilar SVA4

| L_i | Comprimento $L_i(m)$ | Nº de Elementos | $L_{elemento}(m)$ | Comprimento da Zona (m) |
|-------|----------------------|-----------------|-------------------|-------------------------|
| L_1 | 1.30 | 2 | 0.65 | $L_{Sup.} = 15.0$ |
| L_2 | 1.50 | 2 | 0.75 | |
| L_3 | 12.20 | 10 | 1.22 | |
| L_4 | 19.50 | 39 | 0.50 | $L_{Inf.} = 34.50$ |
| L_5 | 10.50 | 14 | 0.75 | |
| L_6 | 4.50 | 3 | 1.50 | |

A hipótese simplificativa considerada nos casos de estudo baseados no pilar SVA4 é a seguinte: $L_{Sup.} = 14.98m \approx 15.0m$ ($L_3 = 12.18m \approx 12.20m$).

Tabela 4.3: Discretização Pilar SVA16

| L_i | Comprimento $L_i(m)$ | Nº de Elementos | $L_{elemento}(m)$ | Comprimento da Zona (m) |
|-------|----------------------|-----------------|-------------------|-------------------------|
| L_1 | 1.30 | 2 | 0.65 | $L_{Sup.} = 14.80$ |
| L_2 | 1.50 | 2 | 0.75 | |
| L_3 | 12.0 | 10 | 1.20 | |
| L_4 | 15.0 | 30 | 0.50 | $L_{Inf.} = 36.0$ |
| L_5 | 12.0 | 16 | 0.75 | |
| L_6 | 9.0 | 6 | 1.50 | |

As hipóteses simplificativas consideradas nos casos de estudo baseados no pilar SVA16 são as seguintes: $L_{Sup.} = 14.73m \approx 14.80m$ ($L_3 = 11.93m \approx 12.0m$); pelas razões enunciadas para SVA3, assume-se que, tendo $L_{Inf.} = 36.15m$ de comprimento ($L_6 = 9.15m$), $L_{Inf.} = 36.0m$ e $L_6 = 9.0m$ (apenas o último elemento na base de L_6 é alterado, passando a ter $1,50m$ de comprimento em vez de $1,65m$).

Note-se que é considerada como hipótese simplificativa, para os alinhamentos transversais, que o lintel de fundo está implementado ao nível do solo e não $20cm$ abaixo deste (ver Figura 4.1).

No anexo B apresentam-se peças desenhadas que ilustram esquematicamente a informação indicada nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3.

4.2 Condições de Fronteira e Dados dos Ensaios SPT

Para a direção longitudinal, foram realizados no total seis casos de estudo, admitindo duas condições de apoio distintas para cada pilar: um simplesmente apoiado (apoios simples no topo e na base) (S.A.); e um segundo, com o apoio de topo fixo e o de base simples (F.). Na Figura 4.4 representam-se as duas condições de fronteira consideradas.

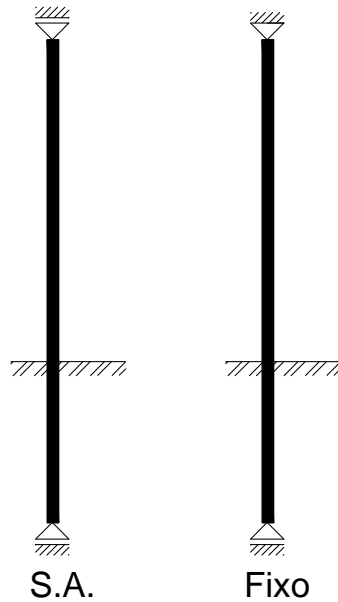


Figura 4.4: Condições de Fronteira na Direção Longitudinal

Na direção transversal, foram realizados nove casos de estudo, três para cada pilar. É assumida simetria, como ilustrado na Figura 4.1. Partindo deste pressuposto, o esquema da Figura 4.5 ilustra a simetria e as diversas hipóteses consideradas para os casos de estudo na direção transversal: existência de ambos os lintéis (2L); existência apenas do lintel de topo (LT); existência apenas do lintel de fundo (LF).

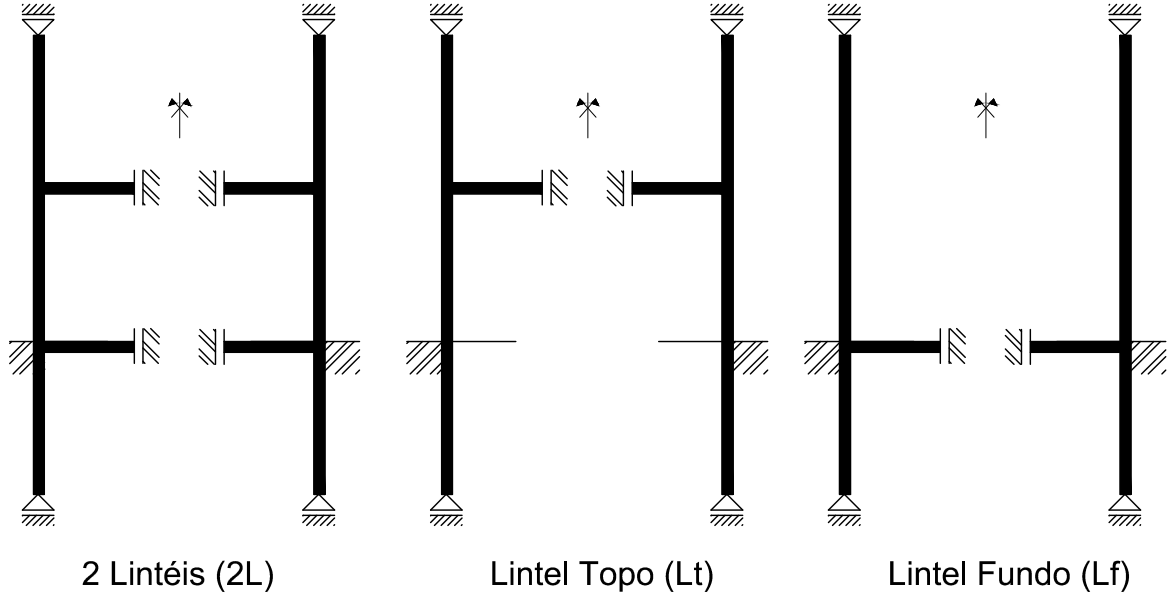


Figura 4.5: Condições de Fronteira na Direção Transversal

Para a direção transversal, apenas o pilar à esquerda do eixo de simetria é analisado. Os lintéis são equacionados na rigidez do pilar como molas helicoidais de rigidez obtida pelas equações (4.1) e (4.2), considerando que os pilares e os lintéis são constituídos por betão com módulo de elasticidade $30GPa$.

$$K_{Lt} = \frac{EI}{\frac{L}{2}} = \frac{30 \times 10^6 \times \left(\frac{1.3 \times 1.5^3}{12} \right)}{5.25} = 2089.286 MNm/rad \quad (4.1)$$

$$K_{Lf} = \frac{EI}{\frac{L}{2}} = \frac{30 \times 10^6 \times \left(\frac{1.9 \times 1.5^3}{12} \right)}{5.25} = 3053.571 MNm/rad \quad (4.2)$$

Nas pormenorizações da Figura 4.6 é ilustrada a implementação dos lintéis na discretização dos pilares.

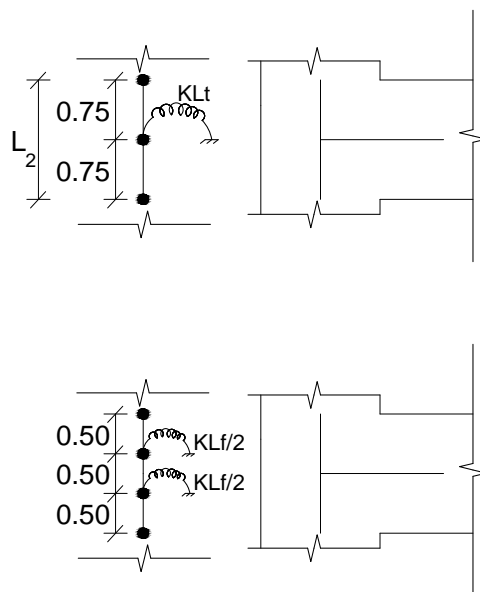


Figura 4.6: Molas helicoidais Correspondentes aos Lintéis

Relativamente aos dados dos ensaios SPT [9] para cálculo das rigidezes das molas de solo considere-se as Figuras 4.7, 4.8 e 4.9. Nessas Figuras, $Z(m)$ representa a profundidade em metros na zona enterrada dos pilares e N representa o resultado dos respectivos ensaios SPT.

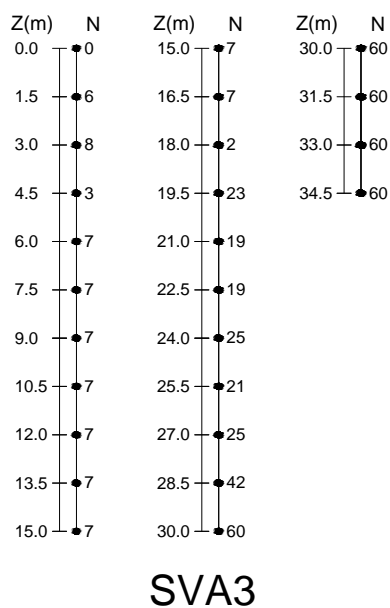


Figura 4.7: Dados SPT Relativos ao Pilar SVA3

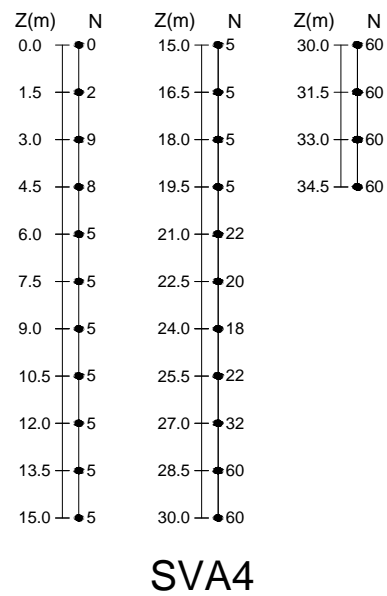


Figura 4.8: Dados SPT Relativos ao Pilar SVA4

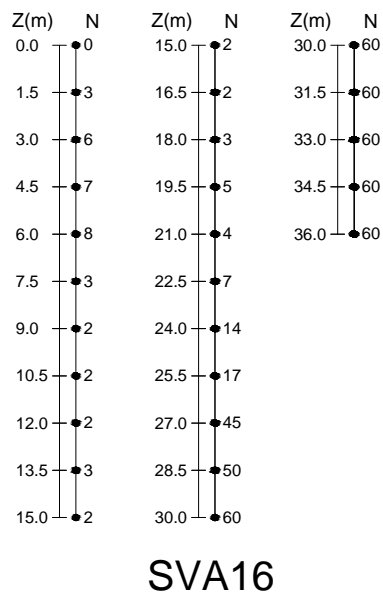


Figura 4.9: Dados SPT Relativos ao Pilar SVA16

Capítulo 5

Resultados

No presente capítulo, resumem-se os resultados das análises realizadas, apresentando-se as cargas críticas e os respectivos comprimentos de encurvadura obtidos para todos os casos de estudo.

5.1 Casos de Estudo Pilar SVA3

5.1.1 Direção Transversal

Com dois Lintéis (2L):

Tabela 5.1: Resultados Pilar SVA3 com Dois Lintéis (2L)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 199.586 | 19.200 | 397.675 | 13.602 |
| SAP2000 | 206.512 | 18.876 | 394.397 | 13.659 |

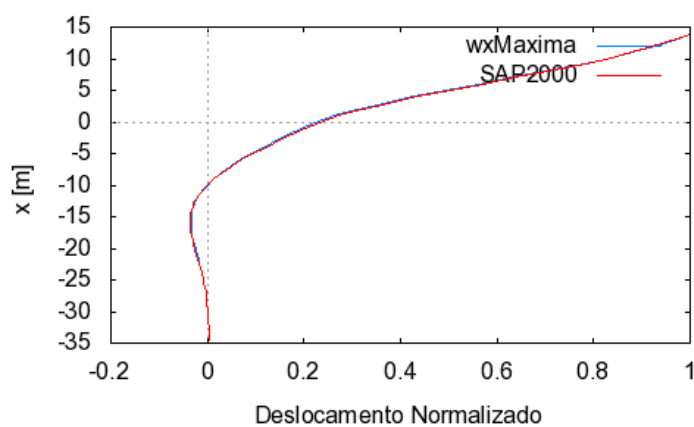


Figura 5.1: Deformada do 1º Modo SVA3-2L

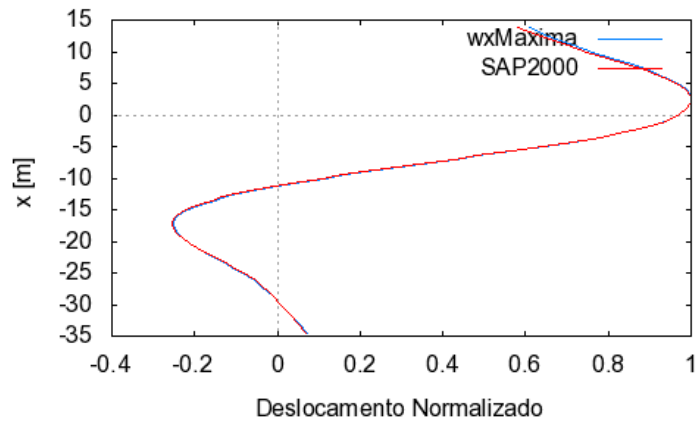


Figura 5.2: Deformada do 2º Modo SVA3-2L

Com Lintel de Topo (LT):

Tabela 5.2: Resultados Pilar SVA3 com Lintel de Topo (LT)

| Programa | $P_{Cr}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 100.902 | 27.003 | 358.487 | 14.327 |
| SAP2000 | 104.865 | 26.489 | 358.486 | 14.327 |

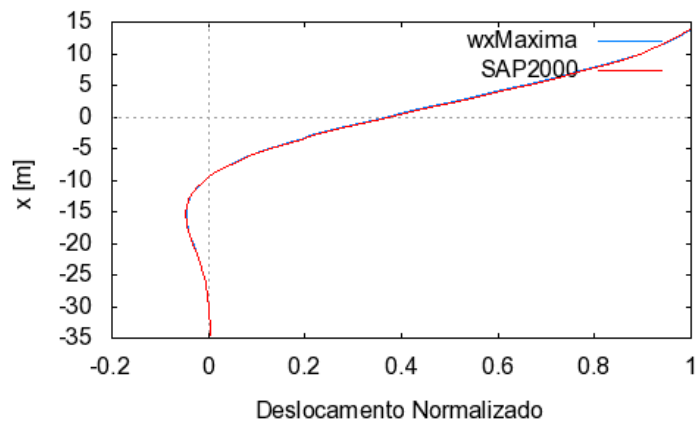


Figura 5.3: Deformada do 1º Modo SVA3-LT

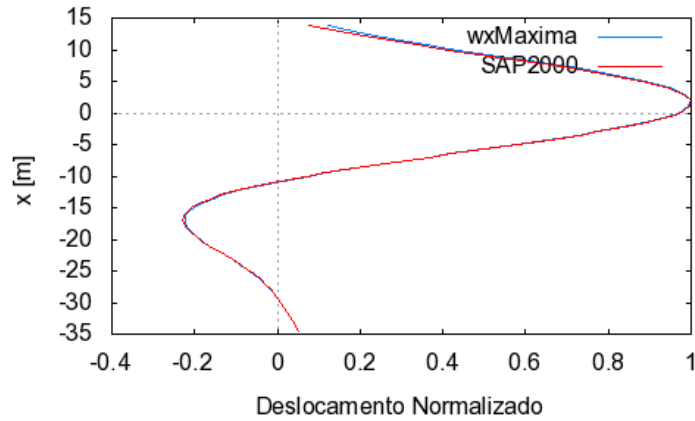


Figura 5.4: Deformada do 2º Modo SVA3-LT

Note-se que os resultados dos dois casos apresentados são aqueles onde existem maiores discrepâncias, no entanto, apenas para o primeiro modo. Este facto verifica-se para os restantes pilares, também na direção transversal para os casos com 2 lintéis (2L) e lintel de topo (LT). Todavia, mesmo com o diagrama das deformadas numa escala aumentada, as deformadas obtidas pelas duas soluções são praticamente coincidentes. Desta forma, para os resultados dos casos seguintes, apenas se apresentam as deformadas da solução wxMaxima. Os diagramas das deformadas obtidos no programa SAP2000 para os restantes casos de estudo encontram-se no anexo C.

Com Lintel de Fundo (LF):

Tabela 5.3: Resultados Pilar SVA3 com Lintel de Fundo (LF)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 67.414 | 33.037 | 368.542 | 14.130 |
| SAP2000 | 67.148 | 33.102 | 364.232 | 14.213 |

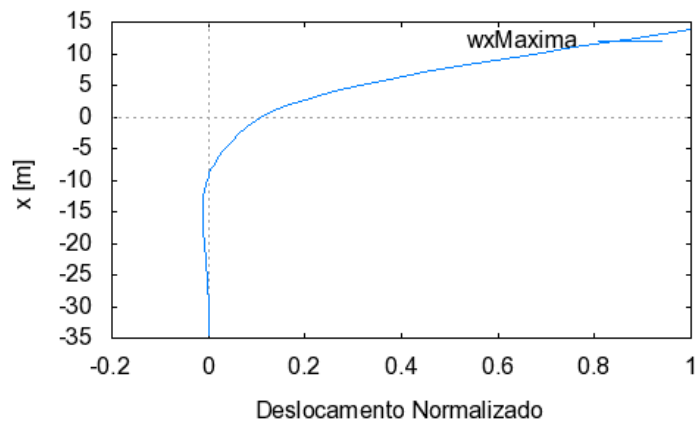


Figura 5.5: Deformada do 1º Modo SVA3-LF

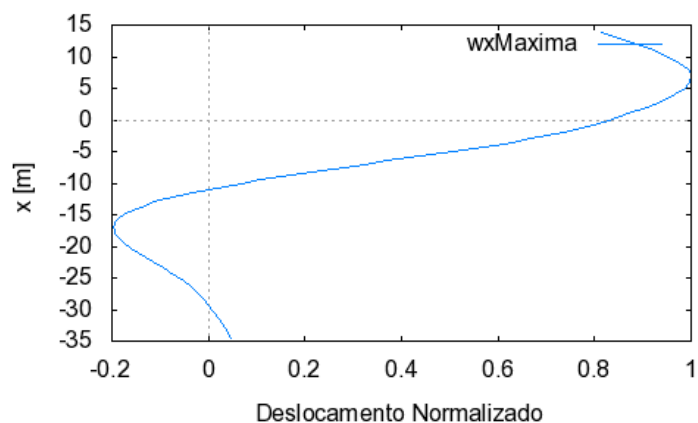


Figura 5.6: Deformada do 2º Modo SVA3-LF

5.1.2 Direção Longitudinal

Simplesmente Apoiado (S.A.):

Tabela 5.4: Resultados Pilar SVA3 Simplesmente Apoiado (S.A.)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 30.828 | 48.854 | 253.977 | 17.021 |
| SAP2000 | 30.736 | 48.927 | 251.046 | 17.120 |

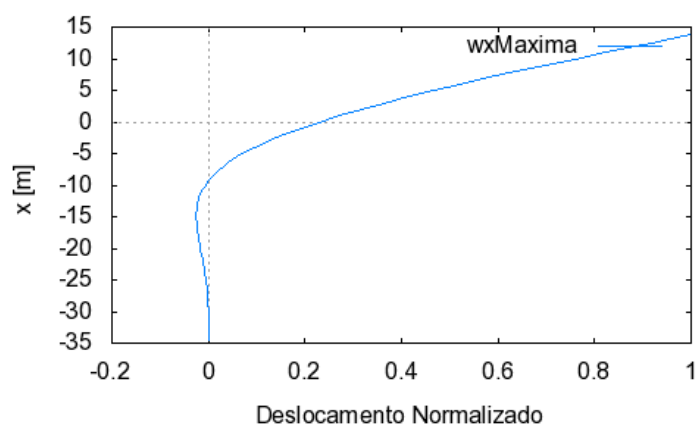


Figura 5.7: Deformada do 1º Modo SVA3-S.A.

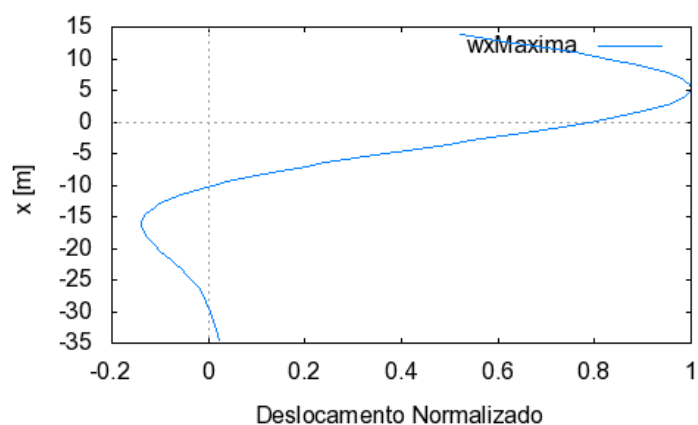


Figura 5.8: Deformada do 2º Modo SVA3-S.A.

Apoio fixo (F.):

Tabela 5.5: Resultados Pilar SVA3 Apoio Fixo (F.)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 224.939 | 18.086 | 490.287 | 12.250 |
| SAP2000 | 222.714 | 18.176 | 484.406 | 12.325 |

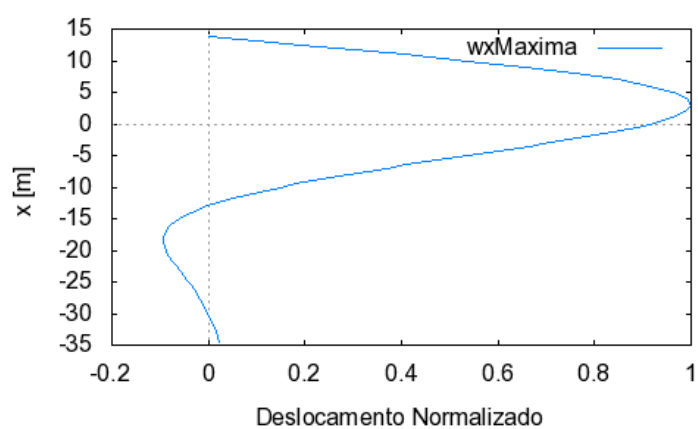


Figura 5.9: Deformada do 1º Modo SVA3-F.

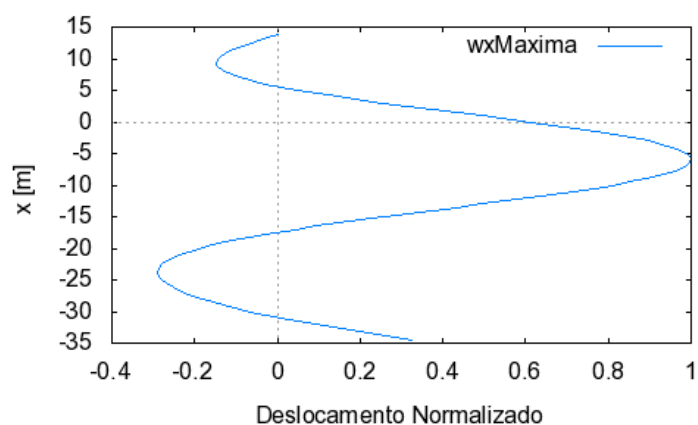


Figura 5.10: Deformada do 2º Modo SVA3-F.

5.2 Casos de Estudo Pilar SVA4

5.2.1 Direção Transversal

Com dois Lintéis (2L):

Tabela 5.6: Resultados Pilar SVA4 com Dois Lintéis (2L)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 178.239 | 20.318 | 385.608 | 13.814 |
| SAP2000 | 184.821 | 19.953 | 382.283 | 13.873 |

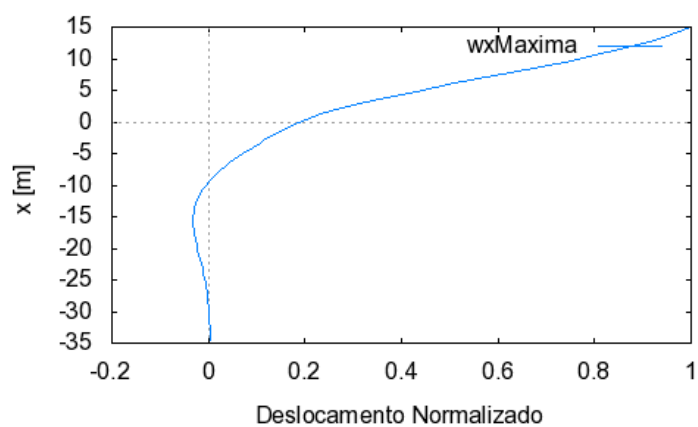


Figura 5.11: Deformada do 1º Modo SVA4-2L

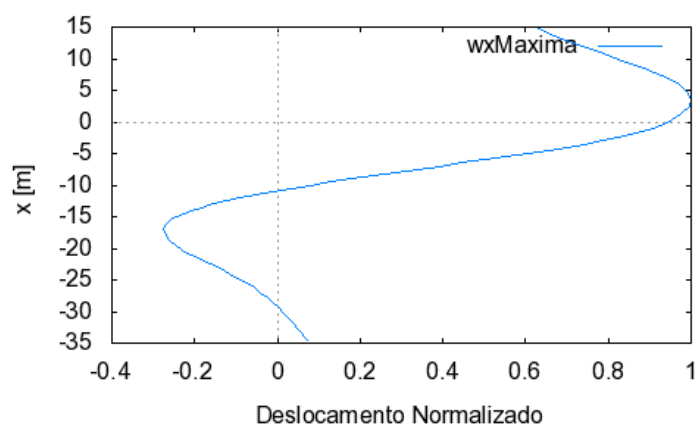


Figura 5.12: Deformada do 2º Modo SVA4-2L

Com Lintel de Topo (LT):

Tabela 5.7: Resultados Pilar SVA4 com Lintel de Topo (LT)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 92.025 | 28.276 | 332.893 | 14.867 |
| SAP2000 | 95.571 | 27.747 | 333.434 | 14.855 |

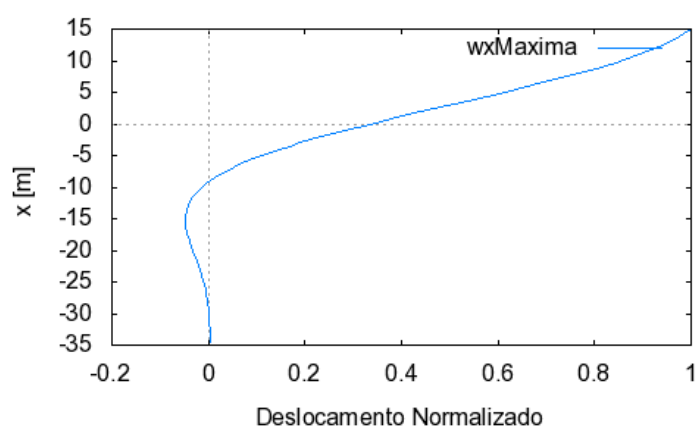


Figura 5.13: Deformada do 1º Modo SVA4-LT

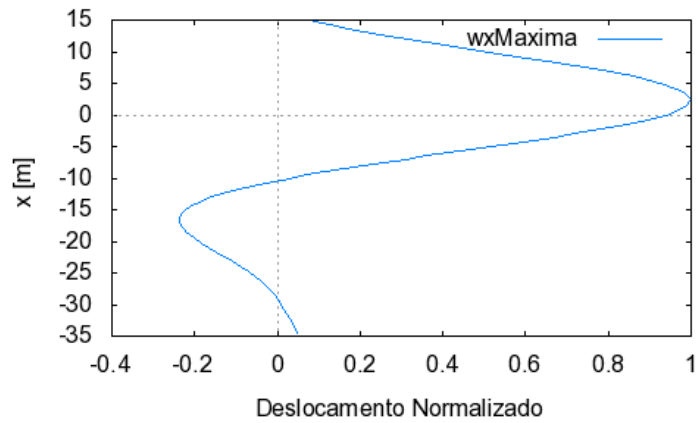


Figura 5.14: Deformada do 2º Modo SVA4-LT

Com Lintel de Fundo (LF):

Tabela 5.8: Resultados Pilar SVA4 com Lintel de Fundo (LF)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 58.671 | 35.413 | 355.955 | 14.377 |
| SAP2000 | 58.455 | 35.478 | 351.513 | 14.468 |

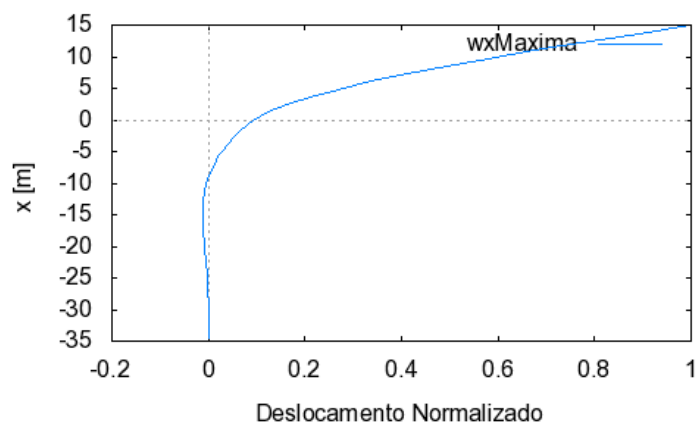


Figura 5.15: Deformada do 1º Modo SVA4-LF

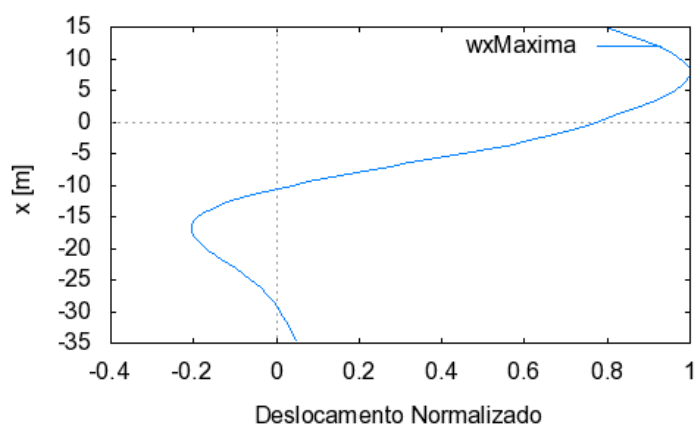


Figura 5.16: Deformada do 2º Modo SVA4-LF

5.2.2 Direção Longitudinal

Simplesmente Apoiado (S.A.):

Tabela 5.9: Resultados Pilar SVA4 Simplesmente Apoiado (S.A.)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 27.774 | 51.470 | 232.378 | 17.794 |
| SAP2000 | 27.693 | 51.545 | 229.646 | 17.900 |

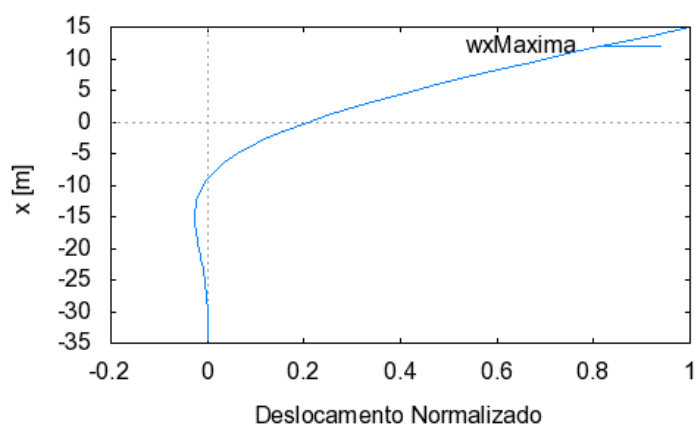


Figura 5.17: Deformada do 1º Modo SVA4-S.A.

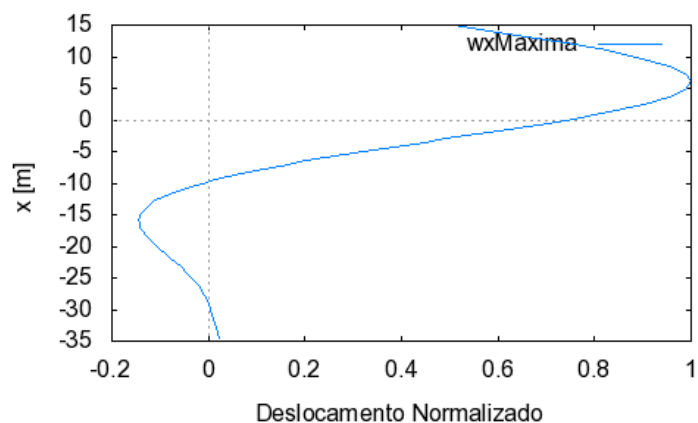


Figura 5.18: Deformada do 2º Modo SVA4-S.A.

Apoio fixo (F.):

Tabela 5.10: Resultados Pilar SVA4 Apoio Fixo (F.)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 207.583 | 18.827 | 462.574 | 12.612 |
| SAP2000 | 205.471 | 18.923 | 457.072 | 12.688 |

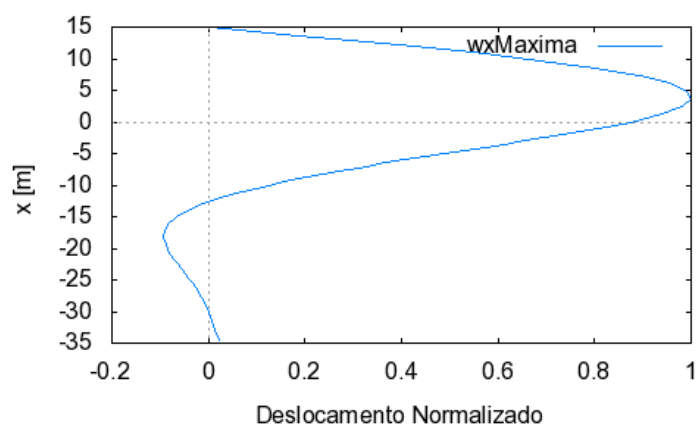


Figura 5.19: Deformada do 1º Modo SVA4-F.

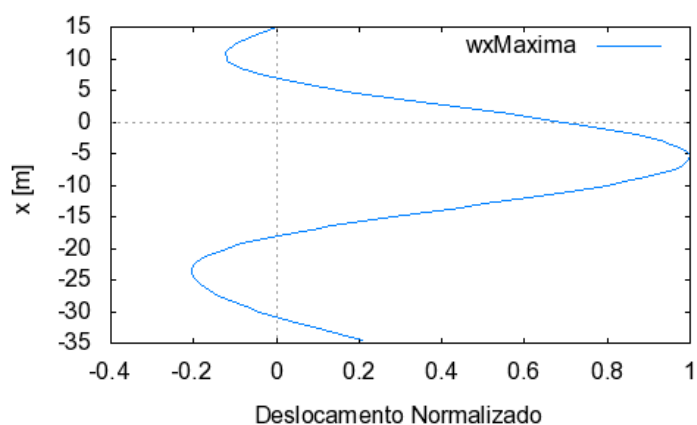


Figura 5.20: Deformada do 2º Modo SVA4-F.

5.3 Casos de Estudo Pilar SVA16

5.3.1 Direção Transversal

Com dois Lintéis (2L):

Tabela 5.11: Resultados Pilar SVA16 com Dois Lintéis (2L)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 179.894 | 20.224 | 348.637 | 14.527 |
| SAP2000 | 186.323 | 19.872 | 345.756 | 14.588 |

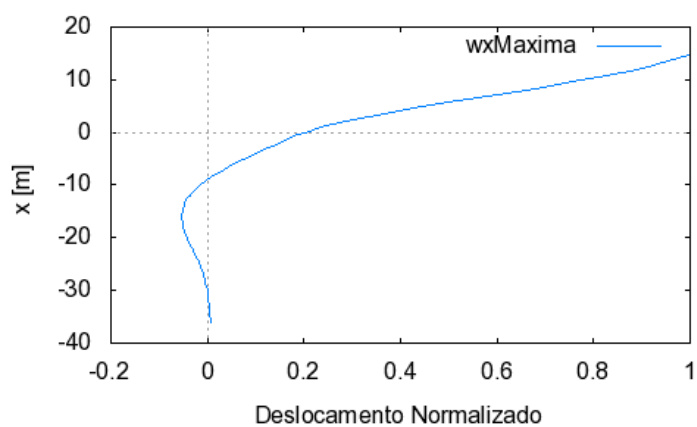


Figura 5.21: Deformada do 1º Modo SVA16-2L

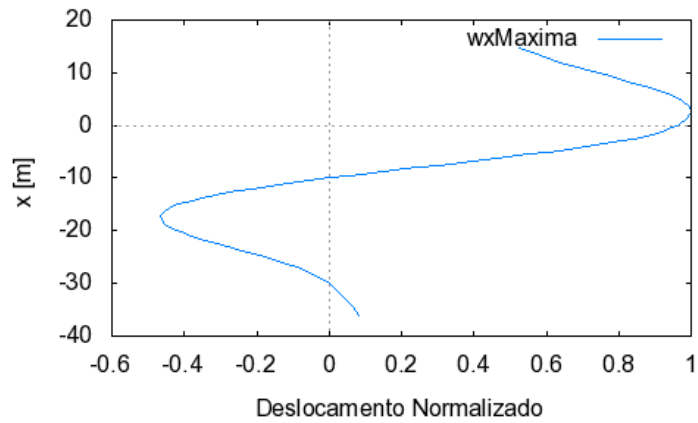


Figura 5.22: Deformada do 2º Modo SVA16-2L

Com Lintel de Topo (LT):

Tabela 5.12: Resultados Pilar SVA16 com Lintel de Topo (LT)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 89.456 | 28.679 | 315.762 | 15.265 |
| SAP2000 | 92.856 | 28.149 | 316.449 | 15.248 |

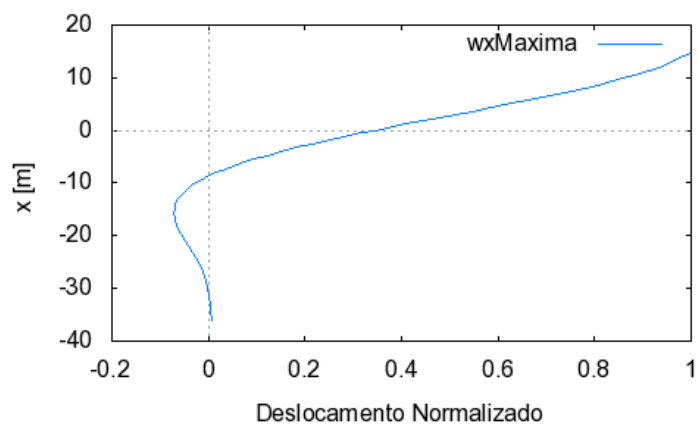


Figura 5.23: Deformada do 1º Modo SVA16-LT

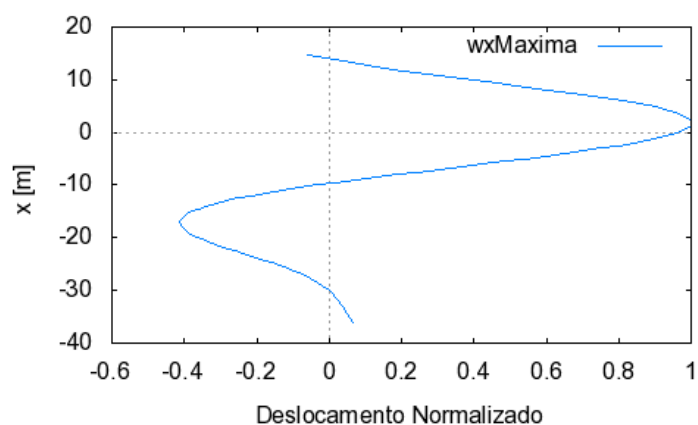


Figura 5.24: Deformada do 2º Modo SVA16-LT

Com Lintel de Fundo (LF):

Tabela 5.13: Resultados Pilar SVA16 com Lintel de Fundo (LF)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 59.810 | 35.074 | 324.644 | 15.055 |
| SAP2000 | 59.588 | 35.140 | 320.732 | 15.146 |

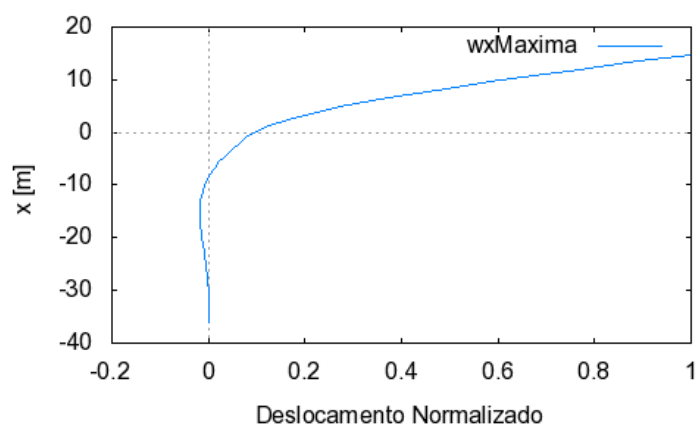


Figura 5.25: Deformada do 1º Modo SVA16-LF

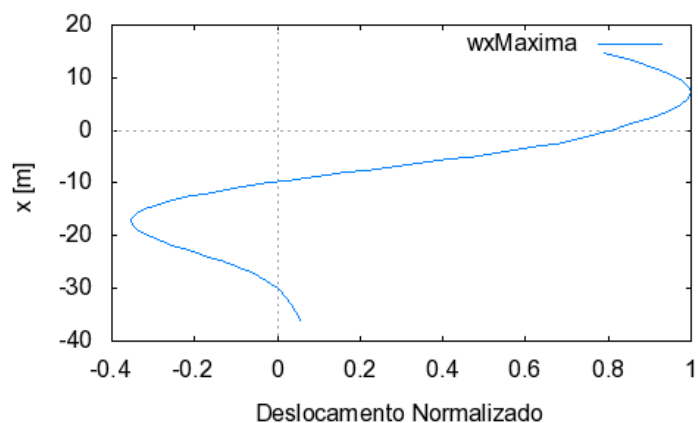


Figura 5.26: Deformada do 2º Modo SVA16-LF

5.3.2 Direção Longitudinal

Simplesmente Apoiado (S.A.):

Tabela 5.14: Resultados Pilar SVA16 Simplesmente Apoiado (S.A.)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 27.054 | 52.150 | 222.386 | 18.189 |
| SAP2000 | 26.979 | 52.223 | 219.868 | 18.293 |

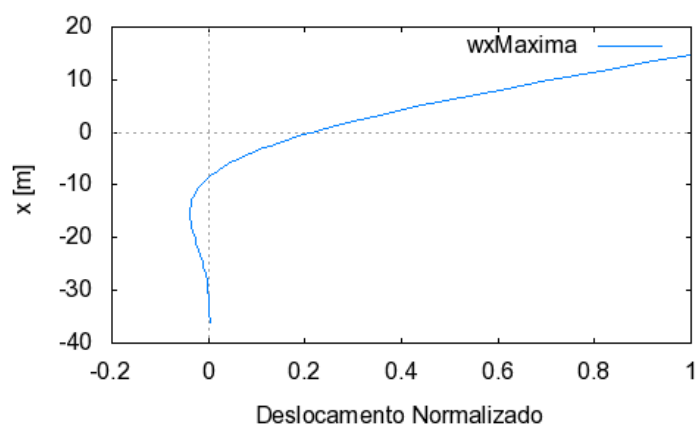


Figura 5.27: Deformada do 1º Modo SVA16-S.A.

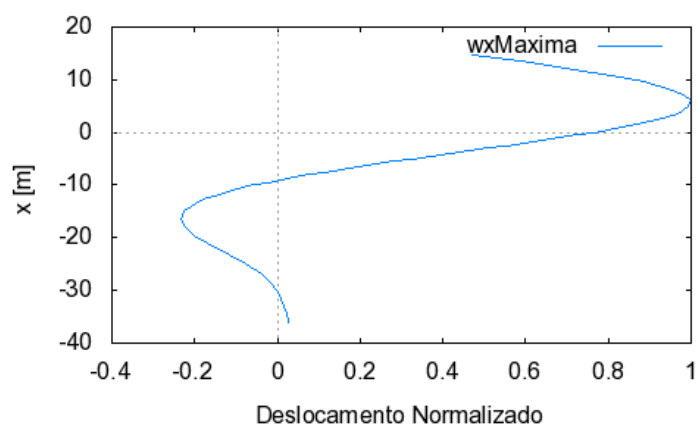


Figura 5.28: Deformada do 2º Modo SVA16-S.A.

Apoio Fixo (F.):

Tabela 5.15: Resultados Pilar SVA16 Apoio Fixo (F.)

| Programa | $P_{Cr.}^{1^o Modo}(MN)$ | $L_e^{1^o Modo}(m)$ | $P_{Cr.}^{2^o Modo}(MN)$ | $L_e^{2^o Modo}(m)$ |
|----------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| wxMaxima | 202.501 | 19.062 | 418.171 | 13.265 |
| SAP2000 | 200.516 | 19.155 | 414.575 | 13.322 |

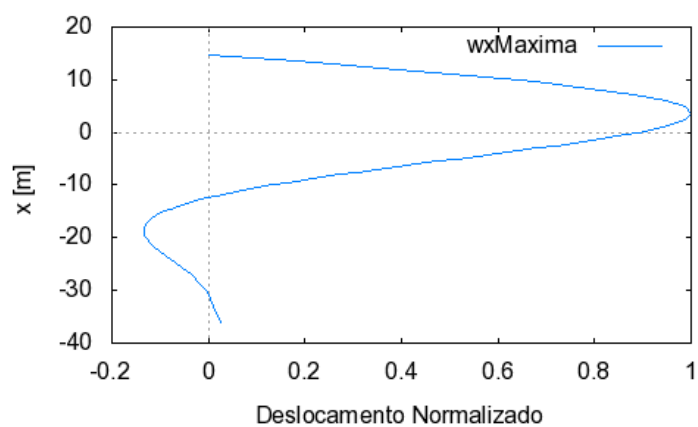


Figura 5.29: Deformada do 1º Modo SVA16-F.

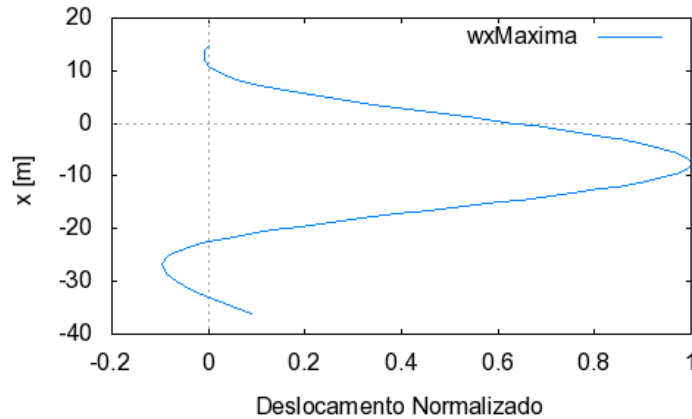


Figura 5.30: Deformada do 2º Modo SVA16-F.

Todos os resultados obtidos são bastante consistentes. Com efeito, ao comparar os valores determinados para os três pilares, no que respeita à carga crítica e correspondente comprimento de encurvadura para as mesmas condições de apoio, estes encontram-se na mesma ordem de grandeza, visto que os alinhamentos de pilares estudados não apresentam grandes diferenças nas suas parametrizações. Note-se que, de entre todos os pilares da estrutura de onde os casos de estudo foram retirados [9], os pilares analisados são aqueles que estão implementados em solos com capacidade de suporte inferior e têm maiores alturas, tornando-os mais esbeltos e consequentemente mais suscetíveis a fenómenos de instabilidade. Assim, para os restantes pilares deste viaduto são de esperar cargas críticas ainda mais elevadas.

Em relação às deformadas dos pilares, observa-se um ligeiro afastamento no andamento da curva de deformada dos pilares entre as duas metodologias adotadas, nomeadamente nos casos de estudo identificados por 2L e LT, na direção transversal. De forma mais objetiva, existe um desvio máximo de 5 % nas zonas de inflexão da deformada (primeiro modo) e no topo do pilar (segundo modo). Para os restantes casos, as curvas de deformada são praticamente coincidentes.

Na direção longitudinal, foram analisados os casos de estudo S.A. e F. para todos os pilares, visto que, do ponto de vista de projeto, para pilares mais esbeltos, é habitual restringir o seu deslocamento lateral de forma a reduzir a sua instabilidade. Este procedimento conduz a um fator multiplicativo de aproximadamente 8 na carga crítica de encurvadura dos pilares.

Do ponto de vista estritamente económico e considerando somente os fenómenos de instabilidade por encurvadura, atendendo à direção transversal, é mais vantajoso considerar a opção de colocar um lintel de topo (LT) em detrimento da solução de colocar um lintel de fundo (LF), uma vez que as cargas críticas obtidas com a opção LT são cerca de 50 % superiores às obtidas com a opção LF, para todos os pilares estudados.

Capítulo 6

Conclusões e desenvolvimentos futuros

6.1 Conclusões

As duas metodologias descritas e aplicadas neste trabalho são capazes de determinar, com precisão e de um modo expedito, as cargas críticas de pilares-estaca, com troços parcialmente enterrados. Nos casos de estudo analisados, extraídos de uma estrutura real, obtiveram-se resultados muito semelhantes para as duas metodologias, não existindo diferenças significativas. Assim, pode afirmar-se que ambas as metodologias são adequadas para projetar uma estrutura para resistir aos estados limite de encurvadura. Aliás, a qualidade de ambas as metodologias tinha sido previamente verificada, ao reproduzir satisfatoriamente uma solução teórica.

Do ponto de vista da segurança à encurvadura, o pilar que reúne as condições mais favoráveis é, para a direção transversal, o caso 2L, e para a direção longitudinal, o caso F. Tal era expectável, pois esses pilares são os que têm os deslocamentos mais restringidos, sendo pois os mais resistentes à encurvadura.

É possível ainda concluir que, para sistemas estruturais do tipo pilar-estaca em condições semelhantes às dos casos de estudo apresentados, a carga crítica do primeiro modo é sempre condicionante relativamente à do segundo modo. A carga crítica do segundo modo apenas foi determinada para confirmar que o primeiro modo efetivamente governa a instabilidade da estrutura.

6.2 Desenvolvimentos futuros

Para aprofundar o estudo desenvolvido nesta dissertação propõe-se:

- Efectuar o mesmo tipo de análise comparativa mas assumindo diferentes parametrizações e hipóteses de cálculo, nomeadamente: admitir que parte da carga axial é absorvida por atrito ao longo da zona enterrada do pilar; considerar diversas condições de apoio bem como diferentes rácios entre altura livre e altura total dos pilares.

- Analisar de modo mais rigoroso a homogeneidade das camadas de solo em profundidade, considerando nomeadamente: variações bruscas das propriedades dos estratos de fundação; nível freático localizado a diferentes profundidades. Tais aspetos terão certamente implicações óbvias em termos da resposta do solo e consequentemente da estrutura.

Bibliografia

- [1] Bowles, J. E., 1996. *Foundation analysis and design*. McGraw-Hill, Singapura.
- [2] Bowles, J. E., 1974. *Analytical and computer methods in foundation engineering*. McGraw-Hill, Tokyo.
- [3] Reis, A. e Camotim, D., 2001. *Estabilidade Estrutural*. McGraw-Hill, Lisboa.
- [4] Vesíc, A. S., 1961. *Bending of Beams Resting on Isotropic Elastic Solid*, Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE), Vol. 87, p. 35-53.
- [5] Vesíc, A. S., 1961 *Beams on Elastic Subgrade and the Winkler's Hypothesis*, (5° ICSMFE), vol. 1, p. 845-850.
- [6] Pyke, R. e Beikae, M., 1983. *A New Solution for the Resistance of Single Piles to Lateral Loading*, ASTM STP No. 835, p. 3-20.
- [7] Yoshida, I. e Yoshinaka, R., 1972. *A Method to Estimate Modulus of Horizontal Subgrade Reaction for a Pile*, Soils and Foundations Tokyo, vol. 12, no. 3, p. 1-17.
- [8] Wang, C. K., 1970. *Matrix Methods of Structural Analysis*, cap. 3, 2ª Ed., International Textbook, Scranton, Pa.
- [9] A2P Estudo e Projetos LDA, 2006. *Projeto do Viaduto do Carregado sobre Auto-Estrada A1: Lanço Arruda dos Vinhos-Carregado*.
- [10] Computers and Structures, CSI, 2013. *SAP2000 Version 17 Analysis Reference Manual*, Berkeley.
- [11] CEN, NP EN 1990 - *Bases para o Projecto de Estruturas*, IPQ, 2009.
- [12] <http://maxima.sourceforge.net/>. Consultado em Setembro 2014.
- [13] Reddy, J. N., Wang, C. M. e Wang, C. Y., 2005. *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*. CRP Press, EUA.
- [14] Kumar, P. S., Karuppaiah, K. B. e Parameswaran, P., 2007. *Buckling Behavior of Partially Embedded Reinforced Concrete Piles in Sand*, Journal of Engineering and Applied Sciences (ARPN), Vol. 2, no. 4.

Bibliografia

- [15] Timoshenko, S. P. e Gere, J. M. , 1961. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, Singapura.

Anexo A

Programa Desenvolvido com Base no Método de Elementos Finitos ([1] e [2])

Listagem do programa desenvolvido para o pilar SVA3 com dois lintéis (2L):

```
[ --> kill(all);
--> E: 30*10^6;
I: 3.14159*.75^4/4;
B: 1.5;
KLintelTopo: E*(1.3*1.5^3/12)/(10.5/2);
KLintelFund: E*(1.9*1.5^3/12)/(10.5/2);

nes1: 2;
nes2: 2;
nes3: 11;
neS: nes1+nes2+nes3;

nei1: 36;
nei2: 14;
nei3: 4;
neI: nei1+nei2+nei3;

ne: neS+neI;

ls1: 1.3;
ls2: 1.5;
ls3: 11;
LS: ls1+ls2+ls3;

li1: 18;
li2: 10.5;
li3: 6;
LI: li1+li2+li3;

LT: LS+LI;
```

Anexo A. Programa Desenvolvido com Base no Método de Elementos Finitos ([1] e [2])

```
L1: ls1/nes1;  
L2: ls2/nes2;  
L3: ls3/nes3;  
L4: li1/nei1;  
L5: li2/nei2;  
L6: li3/nei3;  
  
NM: neI+1-3;  
Nmolas: 3;  
NTmolas: NM+Nmolas;
```

```
--> neD: ne*2;  
neDS: neD-1;  
neDM: neD+1;  
neDMM: neDM+1;  
neDMMM: neDMM+1;  
neDMolas: neD+NM+Nmolas;  
  
np: ne+1;  
npM: np+1;  
npMM: np+2;  
npD: np*2;  
npDM: npD+1;  
npDMM: npD+2;  
npDMMM: npD+3;  
npDS: npD-1;  
npDMolas: npD-NM+1;  
npSup: neS+1;  
npSupM: npSup+1;  
npSupMM: npSupM+1;
```

```
nes1D: nes1*2;  
nes1DM: nes1D+1;  
nes12: nes1+nes2;  
nes12D: nes12*2;  
nes12DM: nes12D+1;  
neSD: neS*2;  
neSDM: neSD+1;  
neSsub: neS-1;  
  
neSil: neS+nei1;  
neSilD: neSil*2;  
neSilDM: neSilD+1;  
neSil2: neSil+nei2;  
neSil2D: neSil2*2;  
neSil2DM: neSil2D+1;  
  
dimLKM: neI-3;  
dimLKM3V: 3*2;  
dimLM: NM+3;
```

```
--> LKDP: zeromatrix(1,neD);  
    for i:1 thru nes1D step 1 do (  
        LKDP[1,i]: L1);  
    for i:nes1DM thru nes12D step 1 do (  
        LKDP[1,i]: L2);  
    for i:nes12DM thru neSD step 1 do (  
        LKDP[1,i]: L3);  
    for i:neSDM thru neSilD step 1 do (  
        LKDP[1,i]: L4);  
    for i:neSilDM thru neSil2D step 1 do (  
        LKDP[1,i]: L5);  
    for i:neSil2DM thru neD step 1 do (  
        LKDP[1,i]: L6);
```

Anexo A. Programa Desenvolvido com Base no Método de Elementos Finitos ([1] e [2])

[illegible]

Anexo A. Programa Desenvolvido com Base no Método de Elementos Finitos ([1] e [2])

```

--> mLI: 0.999;

m: zeromatrix(1,ne);
  for i:1 thru neS step 1 do (
    m[1,i]: 1);
  for i:npSup thru ne step 1 do (
    m[1,i]: (-1+mLI)*(LM[1,i-neSsub])*(1/LI)+1);

G: zeromatrix(np,np);
  G[1,1]: 1/LKDP[1,1];
  G[2,1]: -G[1,1];
  G[np,np]: m[1,ne]/LKDP[1,neD];
  for i:2 thru ne step 1 do (
    G[i,i]: m[1,i-1]*(1/LKDP[1,2*i-2]+1/LKDP[1,2*i]));
  for i:1 thru ne step 1 do (
    G[i,i+1]: -m[1,i]/LKDP[1,2*i]);
  for i:3 thru np step 1 do (
    G[i,i-1]: -m[1,i-2]/LKDP[1,2*i-2]);

--> At: transpose(A);
D: A.K.At;

--> DI:D^^-1;

--> Ds: zeromatrix(np,np);
  for i:1 thru np step 1 do (
    for j:1 thru np step 1 do (
      Ds[i,j]:DI[i+np,j+np]));

--> X: zeromatrix(np,1);
  for i:1 thru np step 1 do (
    X[i,1]: 1);
display(X);

--> dsg: Ds.G;
r1: dsg.X;
R1: zeromatrix(np,1);
  for i:1 thru np step 1 do(
    R1[i,1]: r1[i,1]/r1[1,1]);

--> r2: dsg.R1;
R2: zeromatrix(np,1);
  for i:1 thru np step 1 do(
    R2[i,1]: r2[i,1]/r2[1,1]);

rr2: dsg.r1;

--> r3: dsg.R2;
R3: zeromatrix(np,1);
  for i:1 thru np step 1 do(
    R3[i,1]: r3[i,1]/r3[1,1]);

rr3: dsg.rr2;

--> r4: dsg.R3;
R4: zeromatrix(np,1);
  for i:1 thru np step 1 do(
    R4[i,1]: r4[i,1]/r4[1,1]);

rr4: dsg.rr3;

--> r5: dsg.R4;
R5: zeromatrix(np,1);
  for i:1 thru np step 1 do(
    R5[i,1]: r5[i,1]/r5[1,1]);

rr5: dsg.rr4;

```

Anexo A. Programa Desenvolvido com Base no Método de Elementos Finitos ([1] e [2])

```
--> r6: dsg.R5;
R6: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R6[i,1]: r6[i,1]/r6[1,1]);
rr6: dsg.rr5;

r7: dsg.R6;
R7: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R7[i,1]: r7[i,1]/r7[1,1]);
rr7: dsg.rr6;

r8: dsg.R7;
R8: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R8[i,1]: r8[i,1]/r8[1,1]);
rr8: dsg.rr7;

r9: dsg.R8;
R9: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R9[i,1]: r9[i,1]/r9[1,1]);
rr9: dsg.rr8;

r10: dsg.R9;
R10: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R10[i,1]: r10[i,1]/r10[1,1]);
rr10: dsg.rr9;

r11: dsg.R10;
R11: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R11[i,1]: r11[i,1]/r11[1,1]);
rr11: dsg.rr10;

r12: dsg.R11;
R12: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R12[i,1]: r12[i,1]/r12[1,1]);
rr12: dsg.rr11;

r13: dsg.R12;
R13: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R13[i,1]: r13[i,1]/r13[1,1]);
rr13: dsg.rr12;

r14: dsg.R13;
R14: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R14[i,1]: r14[i,1]/r14[1,1]);
rr14: dsg.rr13;

r15: dsg.R14;
R15: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R15[i,1]: r15[i,1]/r15[1,1]);
rr15: dsg.rr14;
```

Anexo A. Programa Desenvolvido com Base no Método de Elementos Finitos ([1] e [2])

```
r16: dsg.R15;
R16: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R16[i,1]: r16[i,1]/r16[1,1]);
rr16: dsg.rr15;

r17: dsg.R16;
R17: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R17[i,1]: r17[i,1]/r17[1,1]);
rr17: dsg.rr16;

r18: dsg.R17;
R18: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R18[i,1]: r18[i,1]/r18[1,1]);
rr18: dsg.rr17;

r19: dsg.R18;
R19: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R19[i,1]: r19[i,1]/r19[1,1]);
rr19: dsg.rr18;

r20: dsg.R19;
R20: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R20[i,1]: r20[i,1]/r20[1,1]);
rr20: dsg.rr19;

r21: dsg.R20;
R21: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R21[i,1]: r21[i,1]/r21[1,1]);
rr21: dsg.rr20;

r22: dsg.R21;
R22: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R22[i,1]: r22[i,1]/r22[1,1]);
rr22: dsg.rr21;

r23: dsg.R22;
R23: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R23[i,1]: r23[i,1]/r23[1,1]);
rr23: dsg.rr22;

r24: dsg.R23;
R24: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R24[i,1]: r24[i,1]/r24[1,1]);
rr24: dsg.rr23;

r25: dsg.R24;
R25: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R25[i,1]: r25[i,1]/r25[1,1]);
rr25: dsg.rr24;

--> display(R25);
```


Anexo A. Programa Desenvolvido com Base no Método de Elementos Finitos ([1] e [2])

```
--> Pcr: rr24[1,1]/rr25[1,1];
Pcr1: rr23[1,1]/rr24[1,1];
Pcr2: rr22[1,1]/rr23[1,1];
Pcr3: rr21[1,1]/rr22[1,1];
Pcr4: rr20[1,1]/rr21[1,1];

--> umsobre: Pcr.(transpose(rr25)).G.rr25;
vezes: rr25.(transpose(G.rr25));
dsg2: dsg-(1/umsobre)*vezes;

--> rr11: dsg2.X;
R11: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R11[i,1]: rr11[i,1]/rr11[1,1]);

--> r22: dsg2.R11;
R22: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R22[i,1]: r22[i,1]/r22[11,1]);

rr22: dsg2.rr11;

--> r33: dsg2.R22;
R33: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R33[i,1]: r33[i,1]/r33[14,1]);

rr33: dsg2.rr22;

--> r44: dsg2.R33;
R44: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R44[i,1]: r44[i,1]/r44[13,1]);

rr44: dsg2.rr33;

--> r55: dsg2.R44;
R55: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R55[i,1]: r55[i,1]/r55[13,1]);

rr55: dsg2.rr44;

--> r66: dsg2.R55;
R66: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R66[i,1]: r66[i,1]/r66[13,1]);
rr66: dsg2.rr55;

r77: dsg2.R66;
R77: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R77[i,1]: r77[i,1]/r77[13,1]);
rr77: dsg2.rr66;

r88: dsg2.R77;
R88: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R88[i,1]: r88[i,1]/r88[13,1]);
rr88: dsg2.rr77;

r99: dsg2.R88;
R99: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R99[i,1]: r99[i,1]/r99[13,1]);
rr99: dsg2.rr88;
```

Anexo A. Programa Desenvolvido com Base no Método de Elementos Finitos ([1] e [2])

```
r1010: dsg2.R99;
R1010: zeromatrix(np,1);
      for i:1 thru np step 1 do(
        R1010[i,1]: r1010[i,1]/r1010[13,1]);
rr1010: dsg2.rr99;

r1111: dsg2.R1010;
R1111: zeromatrix(np,1);
      for i:1 thru np step 1 do(
        R1111[i,1]: r1111[i,1]/r1111[13,1]);
rr1111: dsg2.rr1010;

r1212: dsg2.R1111;
R1212: zeromatrix(np,1);
      for i:1 thru np step 1 do(
        R1212[i,1]: r1212[i,1]/r1212[13,1]);
rr1212: dsg2.rr1111;

r1313: dsg2.R1212;
R1313: zeromatrix(np,1);
      for i:1 thru np step 1 do(
        R1313[i,1]: r1313[i,1]/r1313[13,1]);
rr1313: dsg2.rr1212;

r1414: dsg2.R1313;
R1414: zeromatrix(np,1);
      for i:1 thru np step 1 do(
        R1414[i,1]: r1414[i,1]/r1414[13,1]);
rr1414: dsg2.rr1313;

r1515: dsg2.R1414;
R1515: zeromatrix(np,1);
      for i:1 thru np step 1 do(
        R1515[i,1]: r1515[i,1]/r1515[13,1]);
rr1515: dsg2.rr1414;

r1616: dsg2.R1515;
R1616: zeromatrix(np,1);
      for i:1 thru np step 1 do(
        R1616[i,1]: r1616[i,1]/r1616[13,1]);
rr1616: dsg2.rr1515;

r1717: dsg2.R1616;
R1717: zeromatrix(np,1);
      for i:1 thru np step 1 do(
        R1717[i,1]: r1717[i,1]/r1717[13,1]);
rr1717: dsg2.rr1616;

r1818: dsg2.R1717;
R1818: zeromatrix(np,1);
      for i:1 thru np step 1 do(
        R1818[i,1]: r1818[i,1]/r1818[13,1]);
rr1818: dsg2.rr1717;

r1919: dsg2.R1818;
R1919: zeromatrix(np,1);
      for i:1 thru np step 1 do(
        R1919[i,1]: r1919[i,1]/r1919[13,1]);
rr1919: dsg2.rr1818;
```


Anexo A. Programa Desenvolvido com Base no Método de Elementos Finitos ([1] e [2])

```
r2020: dsg2.R1919;
R2020: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R2020[i,1]: r2020[i,1]/r2020[13,1]);
rr2020: dsg2.rr1919;

r2121: dsg2.R2020;
R2121: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R2121[i,1]: r2121[i,1]/r2121[13,1]);
rr2121: dsg2.rr2020;

r2222: dsg2.R2121;
R2222: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R2222[i,1]: r2222[i,1]/r2222[13,1]);
rr2222: dsg2.rr2121;

r2323: dsg2.R2222;
R2323: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R2323[i,1]: r2323[i,1]/r2323[13,1]);
rr2323: dsg2.rr2222;

r2424: dsg2.R2323;
R2424: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R2424[i,1]: r2424[i,1]/r2424[13,1]);
rr2424: dsg2.rr2323;

r2525: dsg2.R2424;
R2525: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R2525[i,1]: r2525[i,1]/r2525[13,1]);
rr2525: dsg2.rr2424;

r2626: dsg2.R2525;
R2626: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R2626[i,1]: r2626[i,1]/r2626[13,1]);
rr2626: dsg2.rr2525;

r2727: dsg2.R2626;
R2727: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R2727[i,1]: r2727[i,1]/r2727[13,1]);
rr2727: dsg2.rr2626;

--> r2828: dsg2.R2727;
R2828: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R2828[i,1]: r2828[i,1]/r2828[13,1]);
rr2828: dsg2.rr2727;

r2929: dsg2.R2828;
R2929: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R2929[i,1]: r2929[i,1]/r2929[13,1]);
rr2929: dsg2.rr2828;
```

Anexo A. Programa Desenvolvido com Base no Método de Elementos Finitos ([1] e [2])

```
r3030: dsg2.R2929;
R3030: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R3030[i,1]: r3030[i,1]/r3030[13,1]);

rr3030: dsg2.rr2929;

r3131: dsg2.R3030;
R3131: zeromatrix(np,1);
    for i:1 thru np step 1 do(
        R3131[i,1]: r3131[i,1]/r3131[13,1]);

rr3131: dsg2.rr3030;

--> display(R3131);

--> rr3030[13,1]/rr3131[13,1];
rr2929[13,1]/rr3030[13,1];
rr2828[13,1]/rr2929[13,1];
rr2727[13,1]/rr2828[13,1];
```

Anexo B

Geometria dos Pilares-Estaca Analisados

Pilar SVA3:

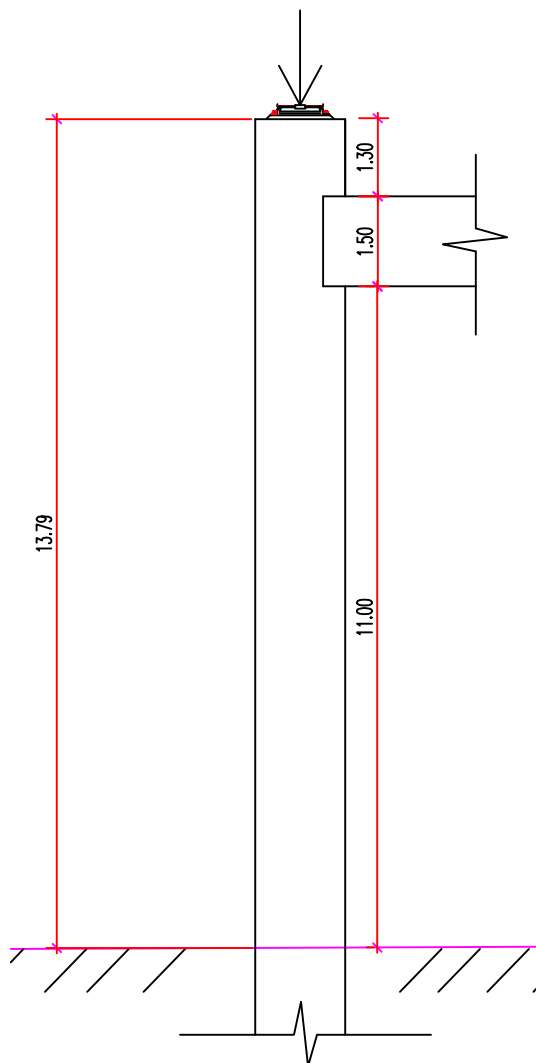


Figura B.1: Pilar SVA3: Zona Acima do Solo

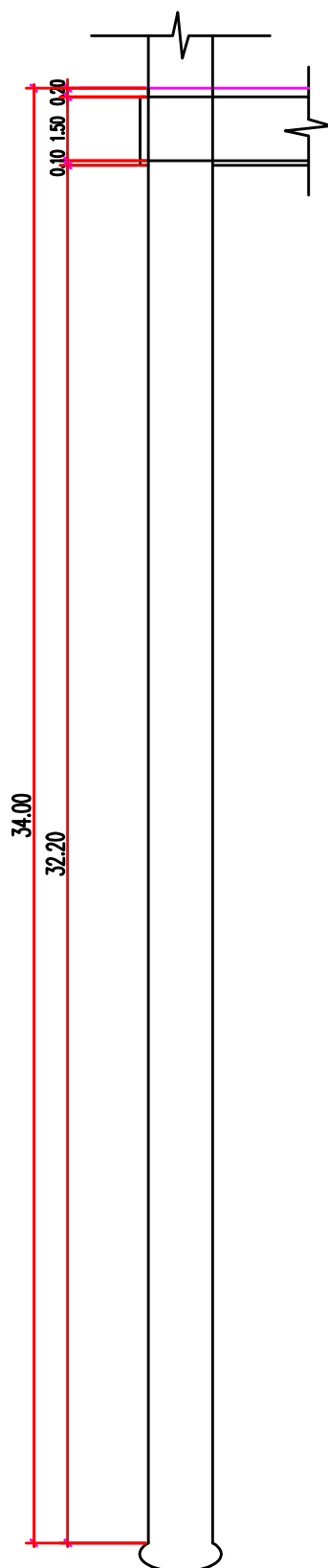


Figura B.2: Pilar SVA3: Zona Enterrada no Solo

Pilar SVA4:

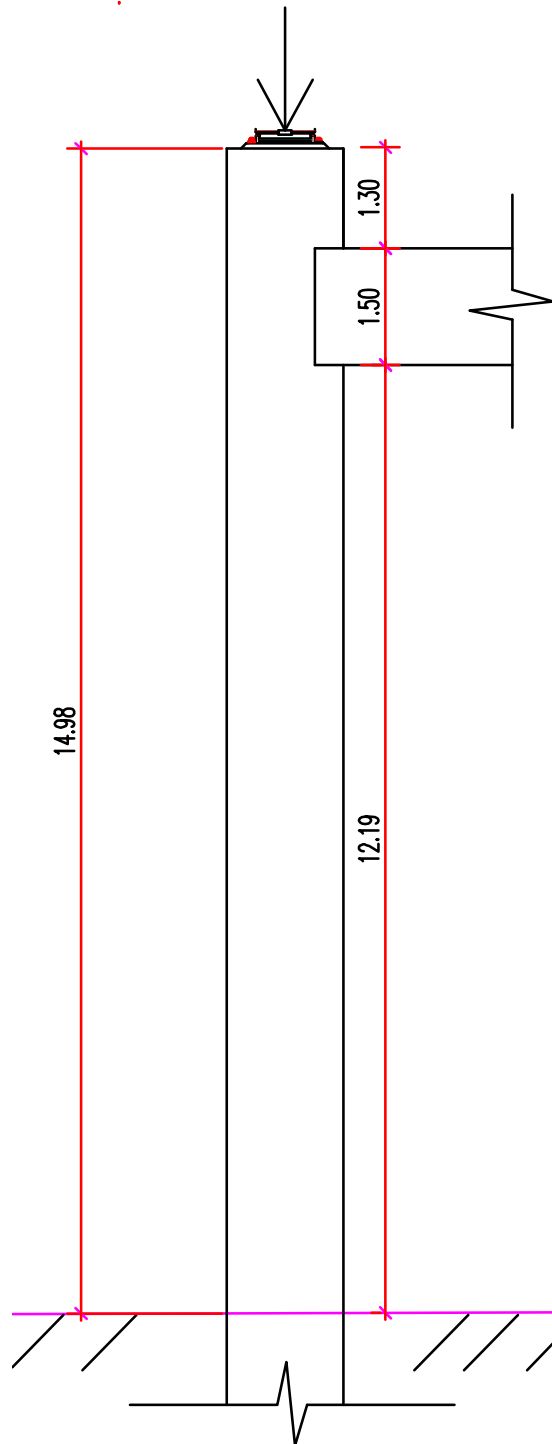


Figura B.3: Pilar SVA4: Zona Acima do Solo

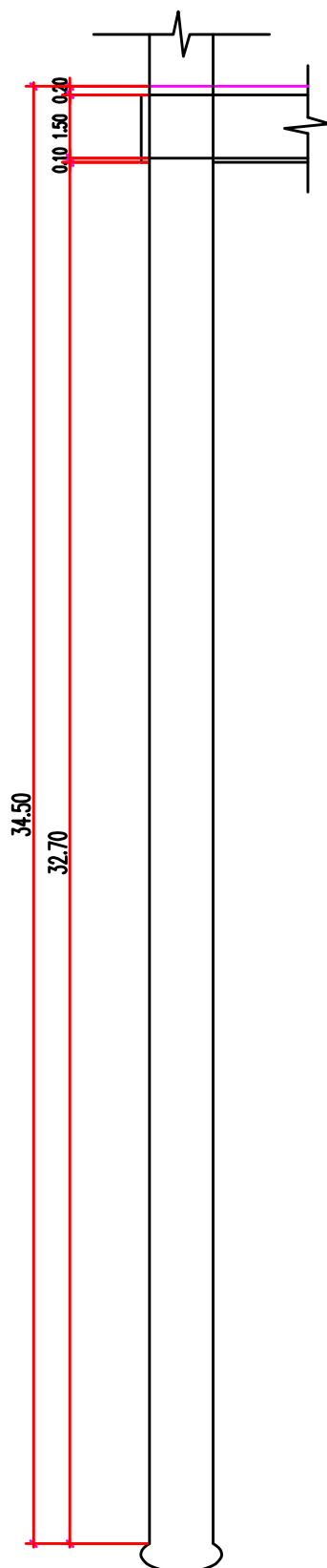


Figura B.4: Pilar SVA4: Zona Enterrada no Solo

Pilar SVA16:

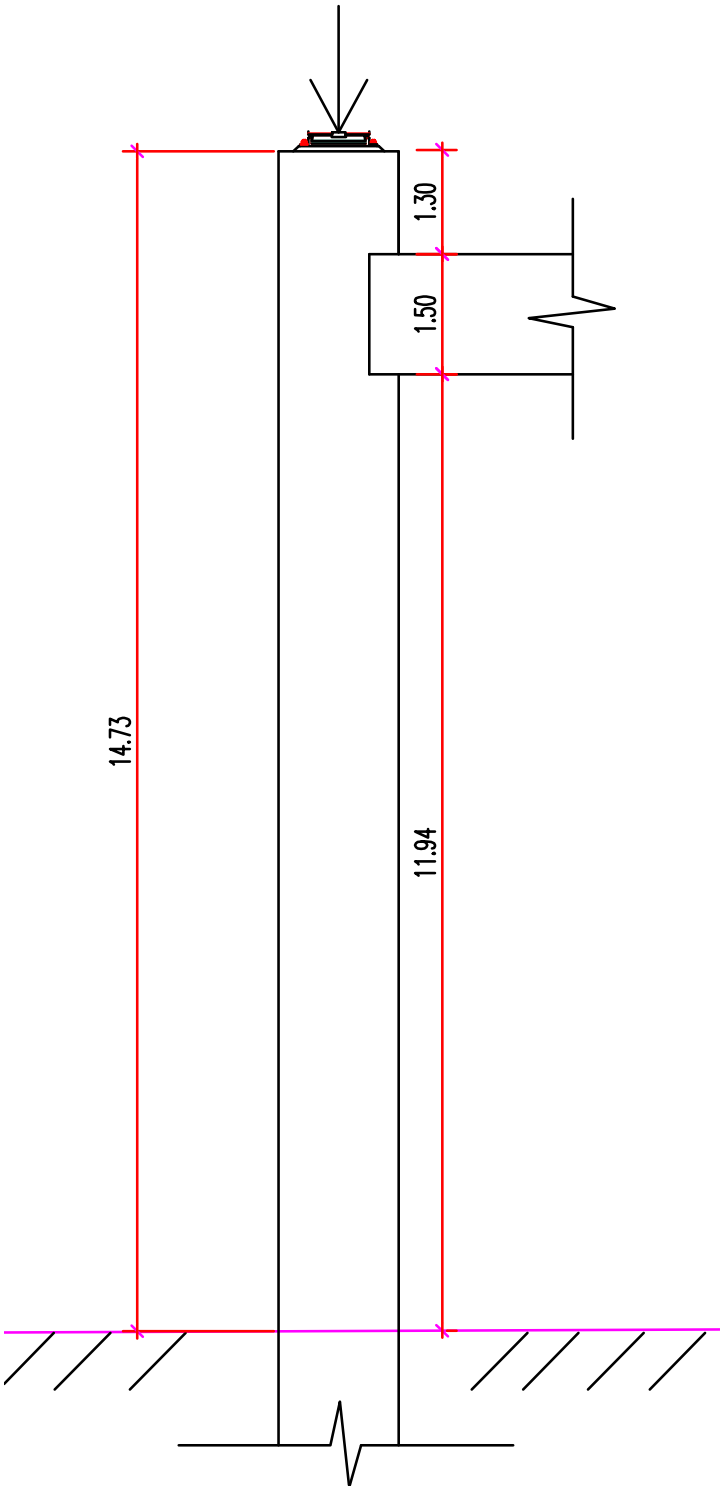


Figura B.5: Pilar SVA16: Zona Acima do Solo

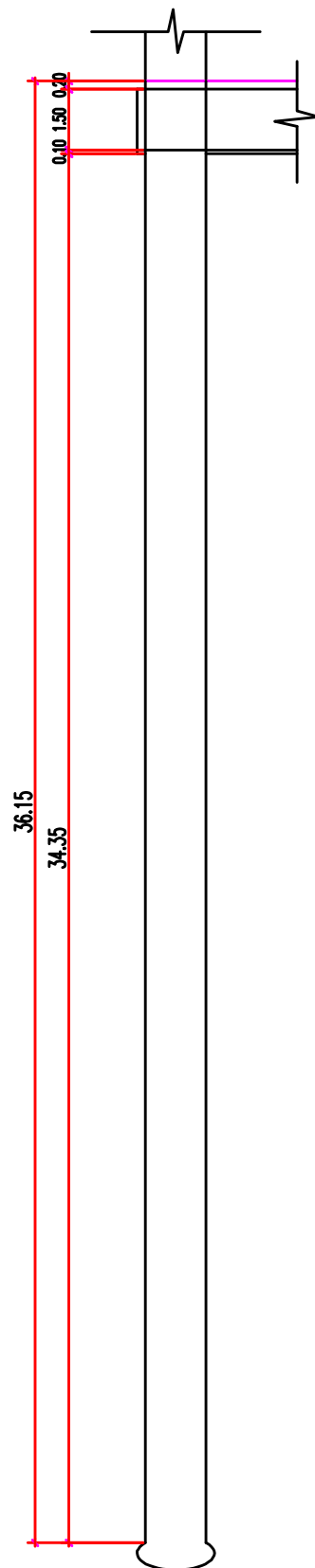


Figura B.6: Pilar SVA16: Zona Enterrada no Solo

Anexo C

Modos de Encurvadura Determinados com o Programa SAP2000

Pilar SVA3:

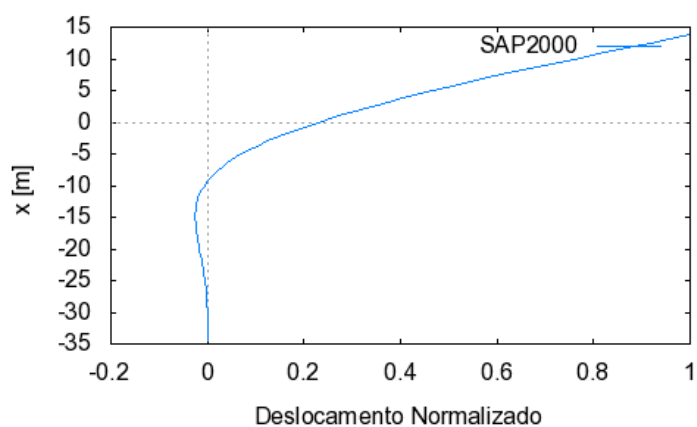


Figura C.1: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA3-S.A.)

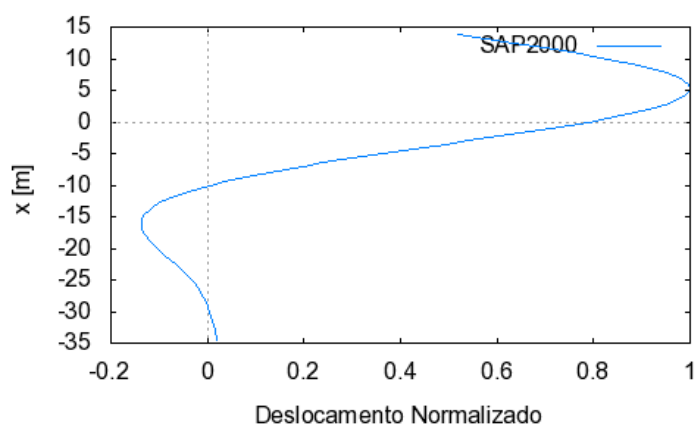


Figura C.2: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA3-S.A.)

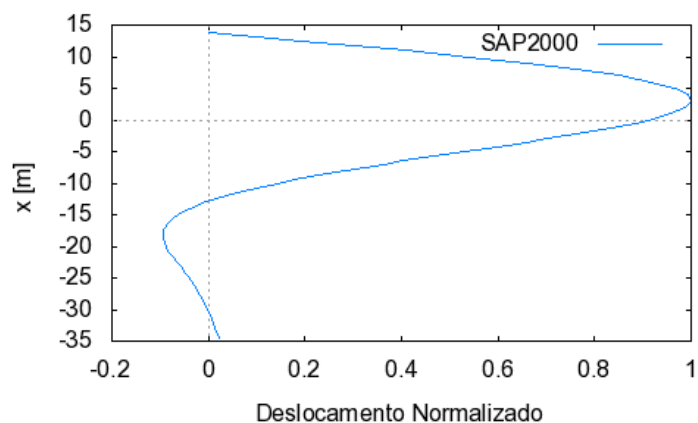


Figura C.3: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA3-F.)

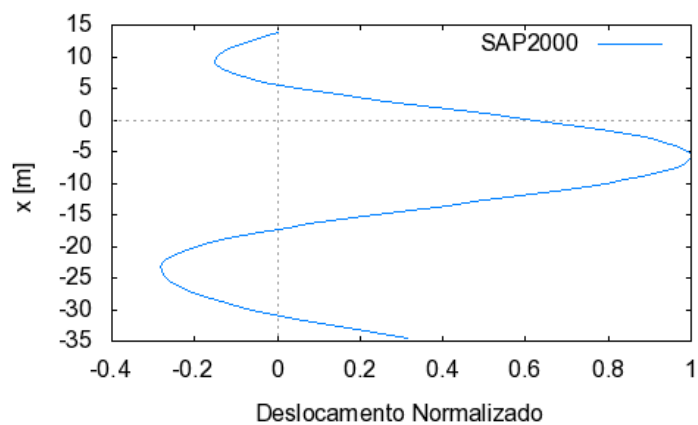


Figura C.4: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA3-F.)

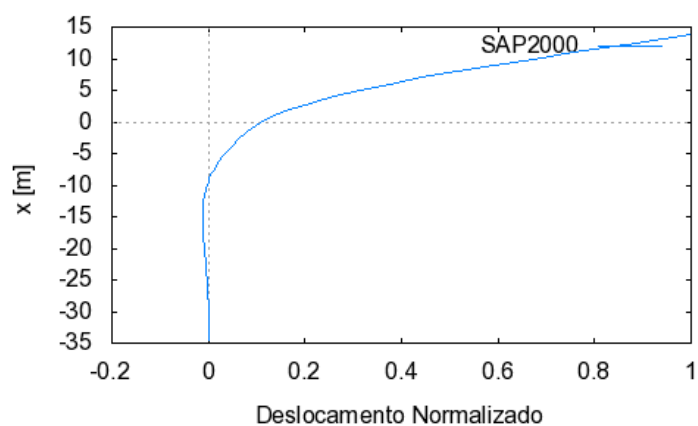


Figura C.5: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA3-LF)

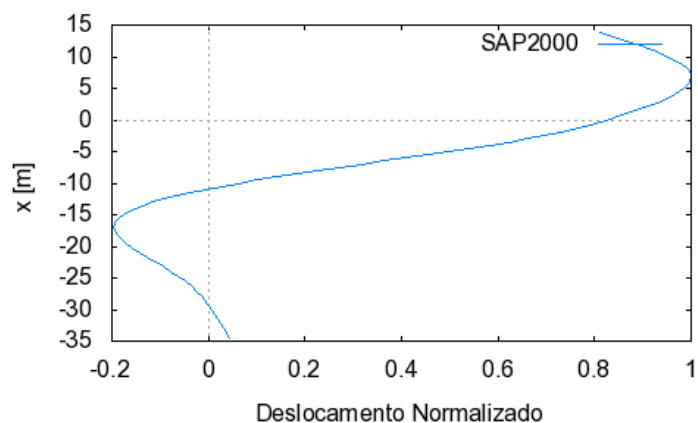


Figura C.6: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA3-LF)

Pilar SVA4:

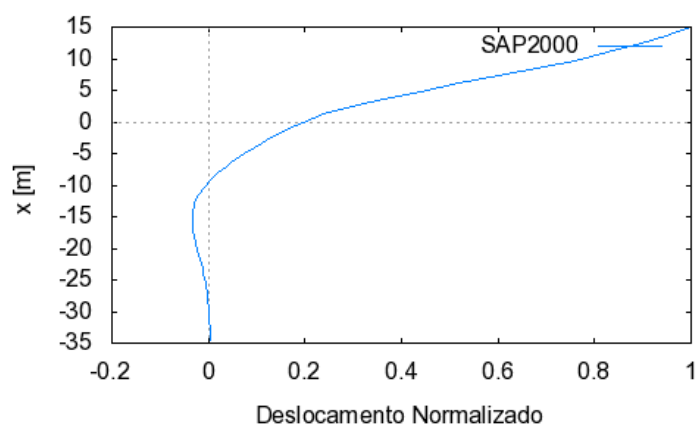


Figura C.7: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA4-2L)

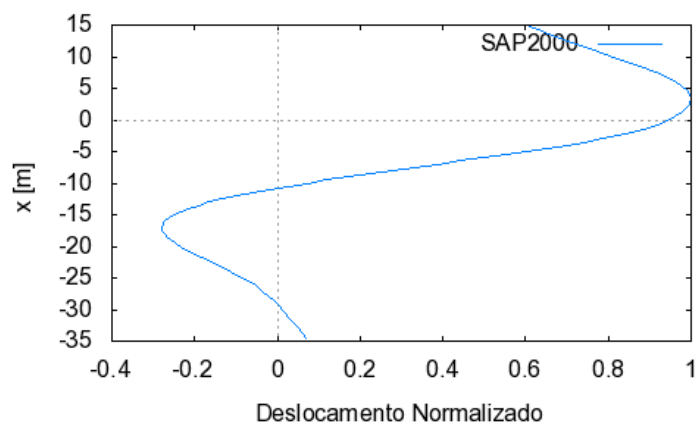


Figura C.8: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA4-2L)

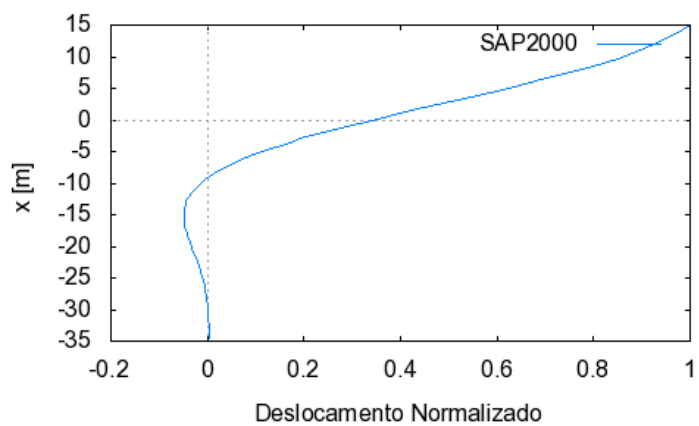


Figura C.9: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA4-LT)

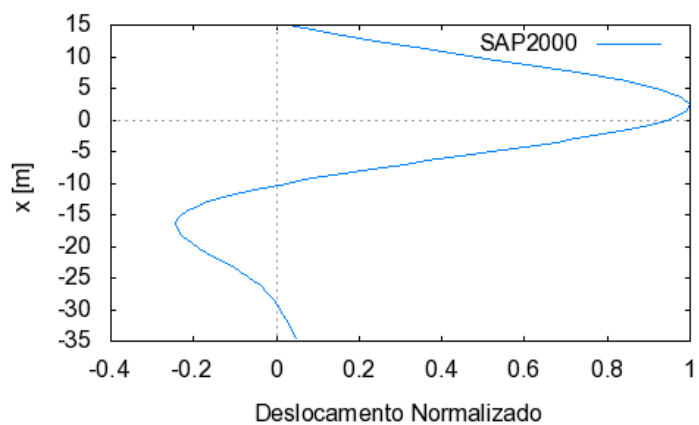


Figura C.10: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA4-LT)

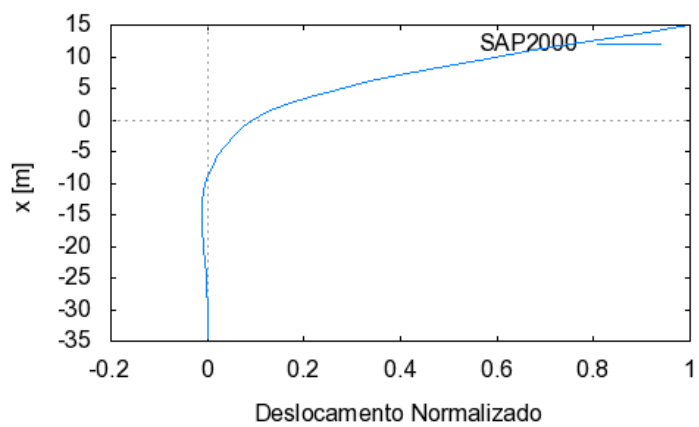


Figura C.11: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA4-LF)

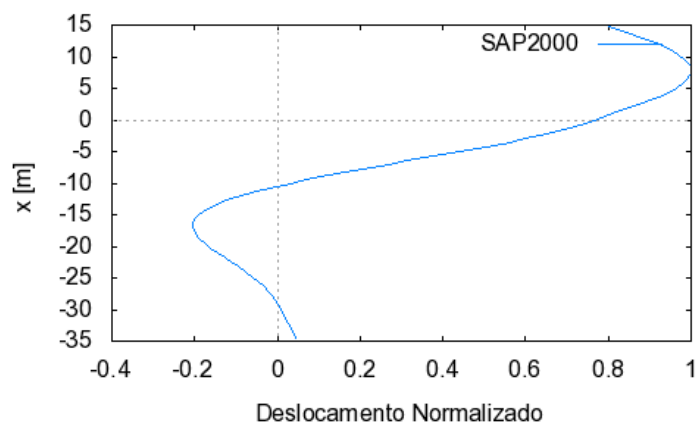


Figura C.12: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA4-LF)

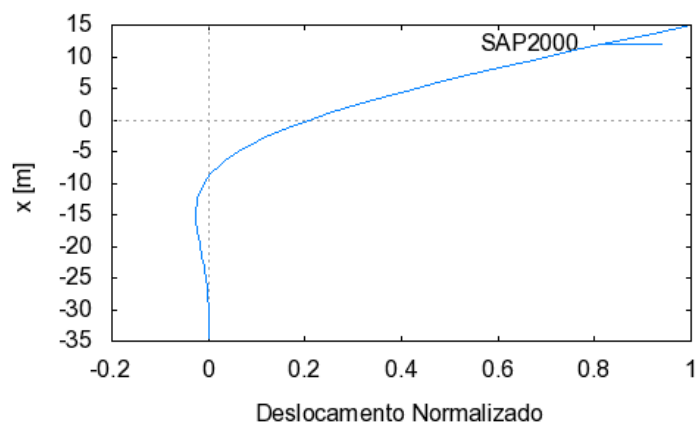


Figura C.13: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA4-S.A.)

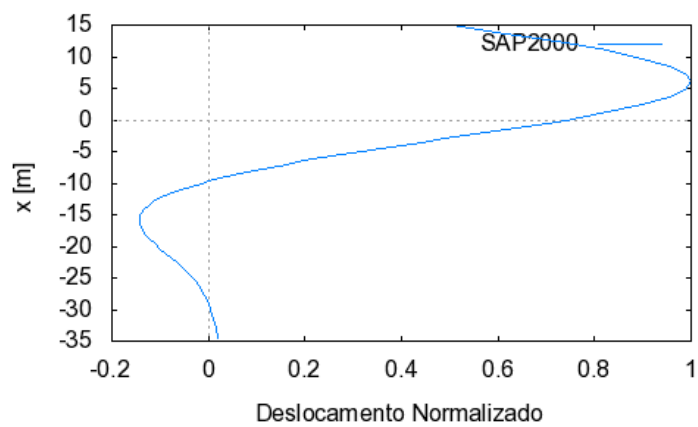


Figura C.14: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA4-S.A.)

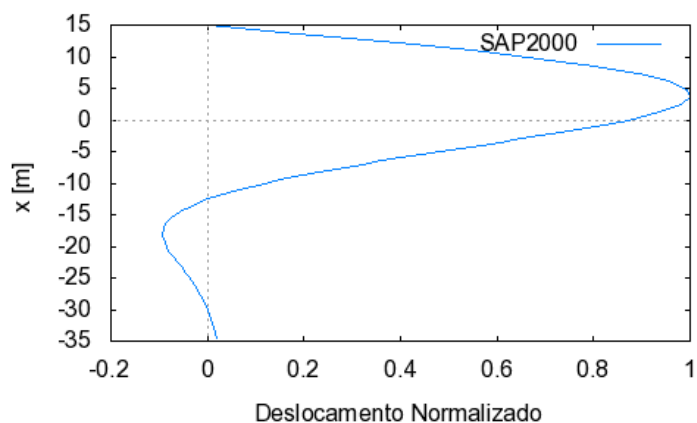


Figura C.15: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA4-F.)

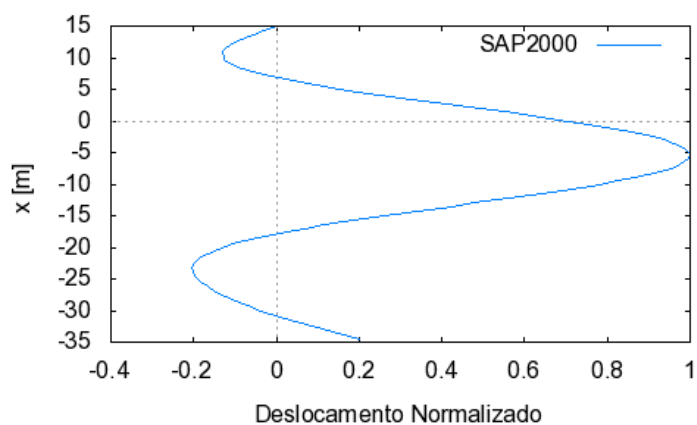


Figura C.16: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA4-F.)

Pilar SVA16:

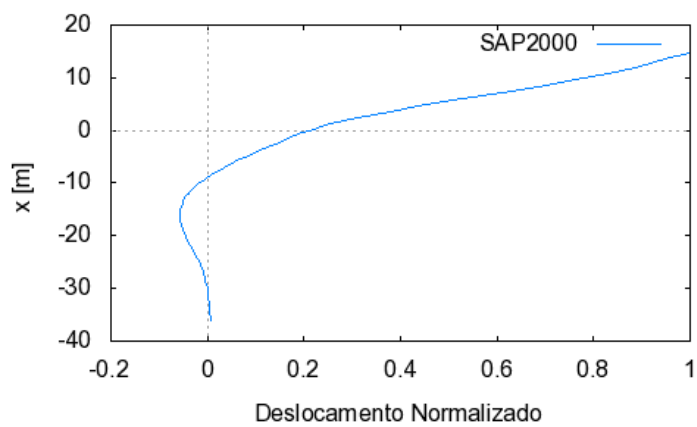


Figura C.17: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA16-2L)

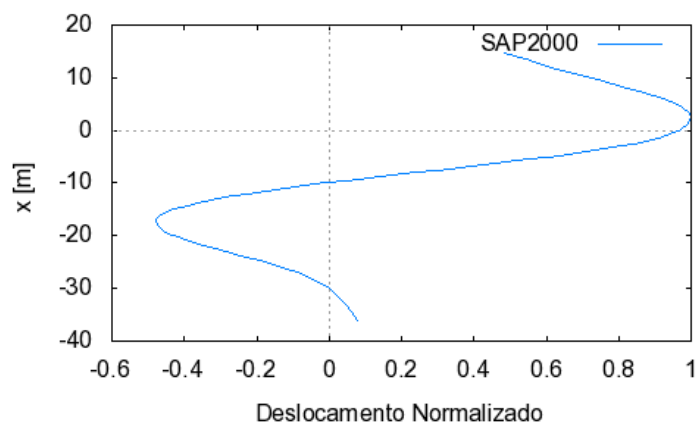


Figura C.18: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA16-2L)

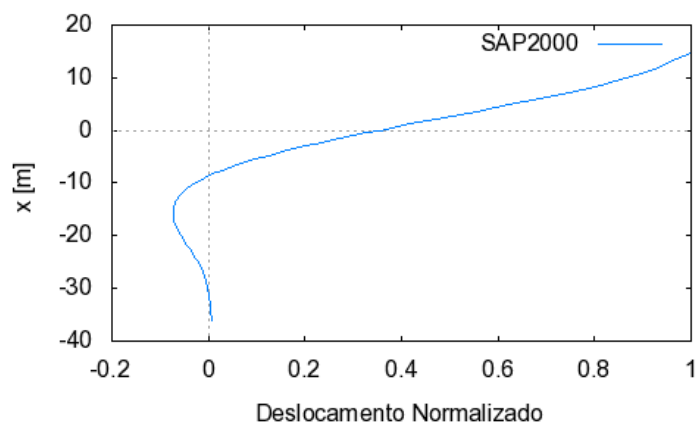


Figura C.19: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA16-LT)

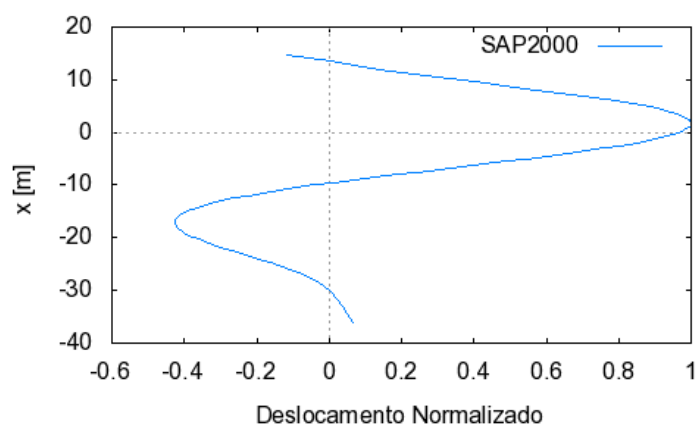


Figura C.20: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA16-LT)

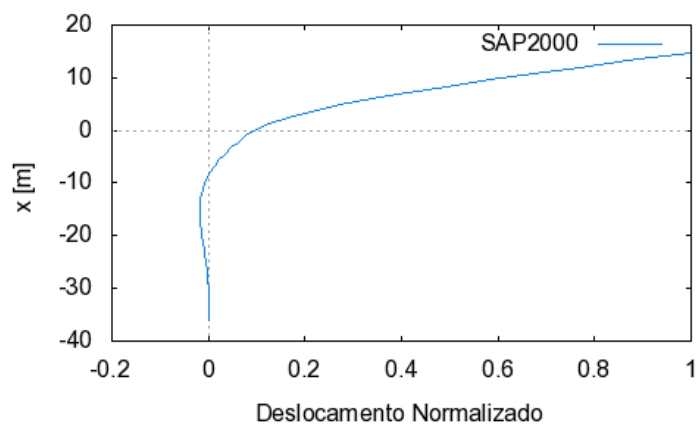


Figura C.21: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA16-LF)

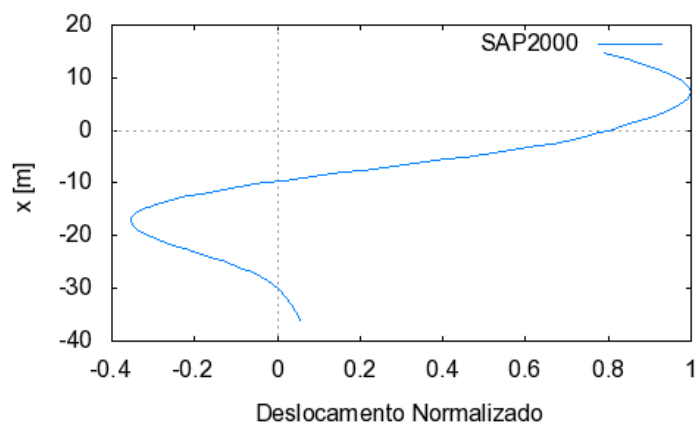


Figura C.22: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA16-LF)

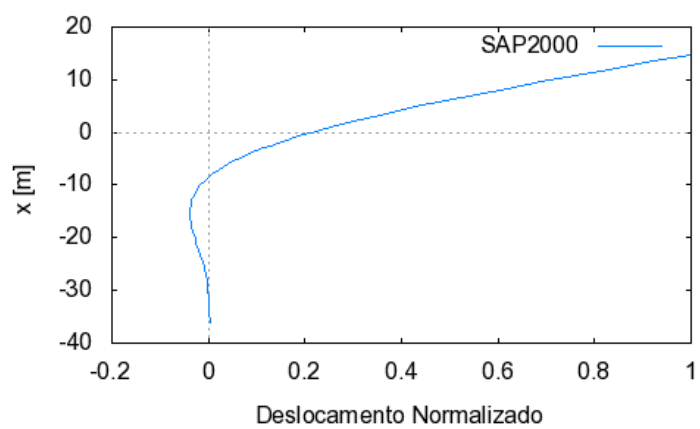


Figura C.23: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA16-S.A.)

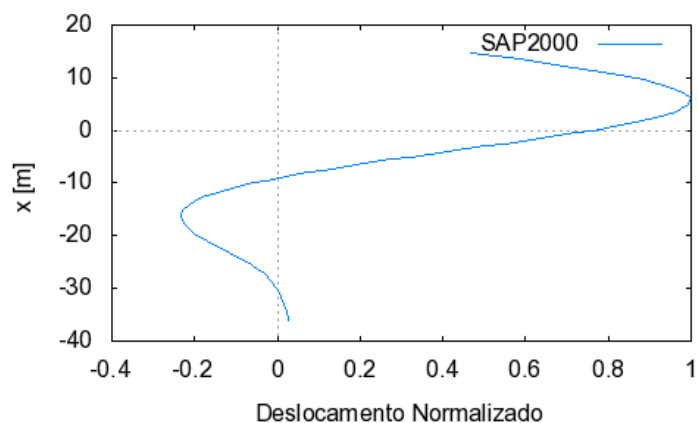


Figura C.24: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA16-S.A.)

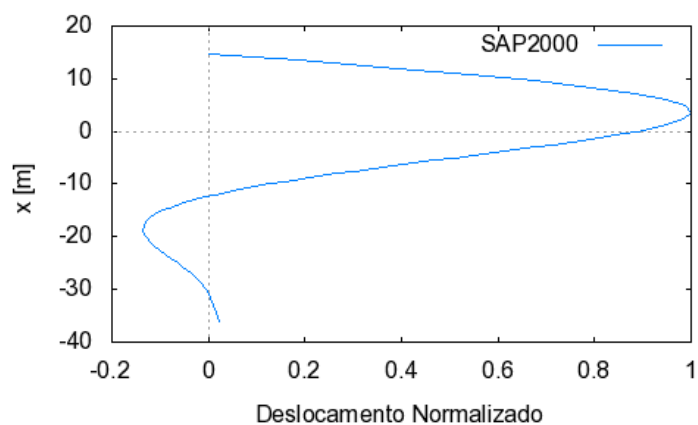


Figura C.25: Deformada do 1º Modo (SAP2000 SVA16-F.)

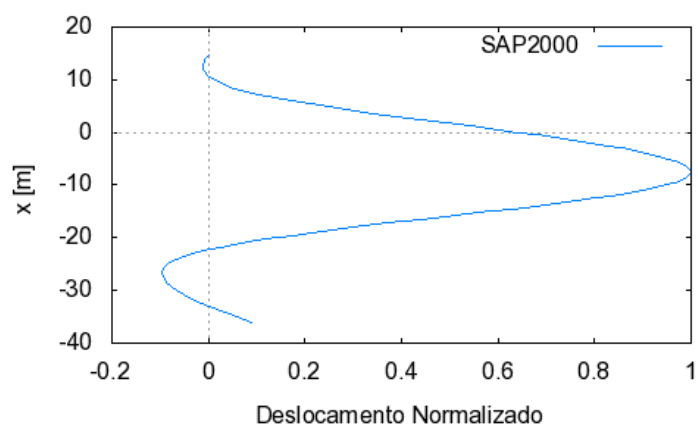


Figura C.26: Deformada do 2º Modo (SAP2000 SVA16-F.)